Příběhy mate- matiky

Stručná historie královny věd

Druhé, revidované vydání

Pistorius & Olšanská
Příbram 2011

ISBN 978-80-87053-64-5

Věnováno všem, kterým ve škole matematika nepřipadala
jako šíření poplašných zpráv.

Předmluva k druhému vydání

Předmluva má v knize několik funkcí: přiznat, pro které čtenáře ji autor psal a tím trochu varovat ty ostatní, pokusit se o zdůvodnění, proč v knize není přesně to, co čtenář po přečtení názvu čekal, a konečně pohrozit, že mohlo být i hůř – stačilo jen trochu přitvrdit. Nuže, co by si čtenář a autor měli vyjasnit u této knihy?

Slovo „příběhy“, použité v názvu, obvykle patří do těsného sousedství historie – v našem případě historie matematiky. Ta však je vědní obor, který studuje vývoj matematiky hodně důkladně a dokonce i její poměrně stručný přehled by zaplnil několik svazků. Jistě by byly poučné a zajímavé, ale nejspíš hlavně pro profesionální matematiky – pro každého jiná kapitola. V tomto svazku proto půjde o něco jiného.

Dějiny matematiky (stejně jako jiných vědních oborů) většinou postupují poměrně plynule, po nevelkých krocích, které k ní postupně přidávají nové znalosti. Někdy se ale z ničeho nic někde zablýskne, něco nečekaného se stane, a najednou víme, jak postavit vejce na špičku, nebo že je nekonečně mnoho různých nekonečen. Právě o takových okamžicích, „kdy se zablýsklo“, a o lidech, kteří „měli nápady, které nikdo jiný neměl“, jsou naše příběhy.

Abychom neztratili přirozenou linii vývoje, do které události a osudy zapadají, jsou v této knize i části, které se snaží alespoň zhruba zmapovat také onen plynulý vývoj, o kterém byla zmínka. Jsou o myšlenkách, většinou považovaných za běžně známé, které nám dnes připadají, jako by tu byly odnepaměti. Jako by je naši prapředkové nacházeli v přírodě mezi pazourkovými peckami – jen to celé trochu omlátit o kameny a naštípat úhledné algoritmy. Ukážeme si, že to tak úplně samo sebou nebylo.

Ukážeme si také, že právě o nejabstraktnějších pojmech a teoriích moderní matematiky se dá vyprávět docela jednoduchými slovy. Ono totiž, když jde o něco opravdu základního, tak je to nakonec až do určité úrovně podrobností vlastně prosté. Celá navigace, kterou potřeboval Kolumbus na své první cestě, byla také srozumitelná pro každého – vyjet z Kanárských ostrovů a plavit se stále na západ. Teprve ti, kdo prozkoumávali nové země po něm, potřebovali složitější prostředky. S novými matematickými světadíly to je stejné.

Následující kapitoly se snaží vyjít vstříc čtenáři, který sám není matematik, s matematikou se však setkává – možná častěji, možná zřídka, ale docela rád. Má znalosti na úrovni dávnějšího absolventa střední školy, ale i tento předpoklad je v drtivé většině kapitol trochu z pilnosti a navíc.

Zato se u čtenáře očekává celková zvídavost, chuť vnímat nové zážitky a hlavně přání, podívat se matematice a jejím tvůrcům trochu do karet. Ne s nimi hrát, jen rozumět, co považují za výhru.

V uspořádání kapitol budeme zhruba respektovat časovou linii a členění podle oborů, pokaždé tomu tak ale nebude. Není to ze zlomyslnosti, ale proto, že v matematice spolu někdy dost nečekaně souvisejí i zdánlivě hodně vzdálené pojmy a výsledky. Poměrně časté odbočky by měly pomoci při porozumění takovým souvislostem

Kromě běžných kapitol a podkapitol se v knize vyskytují ještě další části textu, nadepsané „Heslo“. Mají za úkol připomenout, poněkud mimo časový sled vyprávění, pojmy nebo události, které možná nemusely v minulosti každému bezpečně uváznout v paměti, ale text kapitol na ně více či méně navazuje.

Když matematik píše o dávných dobách, dalekých zemích a lidech s cizími jmény, nevyhne se při tom mnoha chybám. Za to, že se je snad podařilo udržet na úrovni pouhých zjednodušení a ve druhém vydání ještě dál vyčistit, děkuji ochotným radám PhDr. Aleny Hadravové, CSc., Mgr. Jakuba Hrubého, Prof. PhDr. Oldřicha Krále, CSc., PhDr. Dagmar Muchnové, PhD., a PhDr. Bronislava Ostřanského, PhD.

Chci poděkovat i mnoha dalším lidem. K těm, které jsem uvedl v předmluvě k prvnímu vydání rád a s potěšením připojuji upřímné poděkování všem přátelům i neznámým čtenářům, kteří udělali to, co jsem měl udělat já – pořádně si text knihy přečetli, našli v něm trestuhodné množství přehlédnutí, překlepů i omylů, a upozornili mne na ně. Zcela mimořádné díky v tomto směru patří časopisu Pokroky matematiky, fyziky a astronomie a jeho recenzentům, kolegům Heleně Durnové a Jaromíru Baštincovi. Jejich neuvěřitelně trpělivá a pečlivá kontrola zásadním způsobem přispěla k tomu, že v tomto druhém vydání došlo k řadě změn, a to, jak věřím, k lepšímu.

Nakonec chci poděkovat své rodině, která se mnou měla při psaní této knihy neuvěřitelnou trpělivost a chovala se ke mně se shovívavým porozuměním. Vyžadovalo to dávku sebeovládání, které si nikdy nepřestanu vážit.

Autor

Úvodem

Je trudnomyslná?
Dej ji učit matematiku a muziku!
Orákulum v Delfách

Nejlepší protijed proti filozofii vědy
je znalost dějin vědy.
Stephen Weinberg

Mezi okamžikem, kdy si naši prapředkové poprvé všimli, že něčeho je víc a něčeho míň, a dneškem, se všudypřítomnými matematickými modely, uplynulo hodně vody. V té době se matematické myšlení a matematické poznání vyvíjelo, někdy plynule, jindy s překvapivými obraty.

Cesta k dnešní matematice byla dlouhá a otázka, jestli měla smysl a zda její ujití stálo za ten čas a práci, které jí lidé věnovali, nemusí napadat jen zaryté odpůrce matematiky. Zkusme se na ni podívat.

Kde se matematika vzala?

Hodně lidí si myslí, že matematika začala až s počítáním a s rýsováním obrazců. I to bylo už hodně dávno, ale matematika se objevila ještě dřív. Tehdy, kdy lidé pocítili potřebu mluvit a myslet o světě v pojmech jako „malý-velký“, „hodně-málo“, „blízko-daleko“, ale i „vysoký-hluboký“, „rovně-oklikou“ a jim podobných. Teprve pak přišlo „víc-míň“ a až potom následovalo „kolik-tolik“.

Praktické počítání nebo vyměřování, které zanechalo první stopy matematiky v archeologických nálezech, přišlo až později, po mnohem základnějších otázkách z minulého odstavce. Už ve svém prvopočátku ma-tematika nezačínala a dosud nezačíná u čísel a čar. Mnohem víc se zabývala vztahy – kvantitativními i prostorovými. Řečeno o něco vzletnějším slovem, je to věda o strukturách.

Matematické struktury si lidé nezačali vymýšlet pro zábavu. Potřebovali je k životu, a potřebovali je tak, že jim věnovali čas i intelektuální kapacitu, které mohli zdánlivě účelněji využít na zajištění obživy a tepla v jeskyni. Dodejme ještě, že vyznat se ve strukturách nepotřebuje jenom matematik. Dělají náš svět tím, čím pro nás je, a hlavně tím, v čem umíme (alespoň občas) nezabloudit, a lidstvo ještě nevynalezlo na porozumění strukturám trenažér alespoň zhruba srovnatelný s matematikou.

Jak se dál vyvíjela?

Po jednoduchých začátcích nabírala matematika tempo. V některých končinách se vyvíjela pomaleji, v jiných rychleji, v některých zůstala souborem užitečných dovedností, v jiných přerostla dál, na území filozofie, ale v podstatě byla vývojová linie všude hodně podobná. Matematici se především učili stále lépe počítat a rýsovat, aby uměli vyřešit stále složitější problémy. Občas nastal v jejich práci útlum, občas poskočili kupředu, ale nikdy se neztratila kontinuita jejich znalostí. Často používali trochu tajemné (a občas tajené) dovednosti, ale v zásadě zůstávali ve světě každodenní zkušenosti. Teprve časem, avšak z našeho pohledu podivuhodně brzy, už v antickém Řecku, začali k počítání přidávat i něco navíc – filozofický nadhled. Díky němu matematika přežila i svůj vlastní pokrok a zachovala si vnitřní konzistenci.

Matematika vydržela jednolitá, členěná nanejvýš na aritmetiku a geometrii, velmi zhruba až do začátku novověku. Pak se rozvětvila, vznikly nové obory a ty staré se rozrostly do té míry, že i v nich nastala vnitřní specializace. Pořád ještě mířila k řešení problémů, které vývoj přinášel rozvíjejícím se řemeslům a znovuoživené přírodní vědě. Ale problémy, na které si troufla, už byly tak složité, že si postupně vynutily vznik nových matematických pojmů a teorií, které už se zdánlivě začaly vzdalovat od toho, co lidé ve svém každodenním světě vídali.

Jak postupoval vývoj, přibývaly v matematice specializované obory, ale hlavně specializované postupy a pojmy. Vznikla potřeba udělat ve složité struktuře matematických znalostí trochu pořádek, podívat se, zda se některé disciplíny vlastně nepřekrývají, zda se některá myšlenková východiska nevylučují nebo si alespoň nepřekážejí a kde jsou volná místa, která čekají na zaplnění. Přibližně posledních dvě stě let matematika současně rozvíjela klasické obory a přidávala nové, tentokrát hodně abstraktní, jež žádoucí nadhled zajišťují. To je přibližně stav, ve kterém se nachází dodnes. Jen k ní v posledním půlstoletí přibyl obor, jenž zasahuje do matematiky, techniky a ostatních věd a který znovu zkrátil cestu od abstraktních modelů k uživatelskému počítání – kybernetika a později i informatika.

To je, jistě hodně zjednodušené, vývojové schéma, kterého se budeme v následujících kapitolách držet.

Je pořád ještě užitečná?

Jistě, matematika se hodí k řešení mnoha praktických problémů. Bez ní bychom neuměli spočítat pevnost mostů, tvar vrtulí, ale ani stavbu molekul, přirozený rozvoj a útlum populací živočichů a rostlin, klimatické změny ani astronomické jevy. Kromě toho ale dost často pracuje matematika jakoby „pro sebe“ – vytváří teorie, které se zdánlivě ničeho jiného než jí samé netýkají a jejichž výsledky nikdo jiný než matematici pro své bádání nepotřebuje. Zdánlivě!

Skutečnost je jiná. Právě nejabstraktnější teorie připravují terén a dostatečně mocné a účinné nástroje pro „praktičtější“ obory matematiky, až po důsledky, které sahají přímo do lidských domovů a pracovišť. Dá se dokonce říci, že dnešní vývoj vědy, techniky a společenské organizace už by začal hodně skřípat, kdyby se při svých metodách nemohl spolehnout právě na ony nejobecnější matematické disciplíny. Nemluvě o občasných zkratkách, při nichž se z abstraktního a zcela „neužitečného“ zapadlého zákoutí matematiky náhle stane nástroj, bez kterého bychom to měli v životě mnohem těžší.

Hodil by se příklad? Nuže, Boolova algebra, o které se později dovíme víc, byla dlouho zajímavá jen pro zmatematizovanou sortu logiků, ale dnes je základnou pro konstrukci automatů včetně počítačů. Teorii čísel, už od antiky tiché zákoutí pro všechny, které lákala „neužitečná“ matematická krása, dnes vděčíme za počítačovou kryptografii, a tedy i za to, že naše úspory jsou podstatně bezpečnější, než by byly bez ní.

Takže, máme-li to shrnout – pořád ještě je matematika užitečná, dokonce čím dál užitečnější. Měli jsme a máme to zapotřebí.

Bude však správné a pro vyváženost pohledu na matematiku dokonce nezbytné uvědomit si ještě jednu věc. S otázkou, jestli nám matematika stála za všechnu práci do ní vloženou, souvisí další nesporná skutečnost.

Matematika je součást lidské kultury

Ano, matematika patří také (a, věřte nebo nevěřte, hodně) do kategorie estetických a kulturních zážitků. Od umění se liší tím, že ji jde těžko vnímat bez určitých, často značných a specializovaných znalostí. Nicméně vztah matematiky ke kultuře tady je, a není to jen prvoplánový vztah mezi geometrií a perspektivou nebo mezi hudebními akordy a číselnými poměry v délkách strun. Mnohem důležitější je dar harmonie a vnitřního souladu, který dovede matematika poskytnout. V tom je podstata oné rady delfského Orákula, citované v záhlaví. Matematika je pro člověka, jenž se ji naučí vnímat, nesporně estetický zážitek – a nemusí kvůli tomu trávit dlouhé hodiny studiem vysoce abstraktních disciplín. Její krása často leží přímo na očích, stačí se dobře dívat.

V naší národní kultuře je zvykem považovat za její moderní základ slovesné umění, případně jazykovědné úsilí buditelů, ale méně už si uvědomujeme důležitou práci nadšených přírodovědců a techniků. A tak málokdo ví, že dokonce u začátků česky psané literatury v předvečer obrození stál kupodivu matematik.

Čtenáři Jiráskova *F. L. Věka* si možná vzpomenou na postavu **pátera Vydry**. Psal se podle dobové zvyklosti Stanislaus Wydra a žil v letech 1741–1804. Byl tedy o dvanáct let starší než Josef Dobrovský, se kterým

Stanislav Vydra

se přátelil a se kterým sdílel i stejný řád – oba byli původně jezuité. Když Josef II. zrušil v roce 1773 jejich řád, museli jezuité odejít také z profesorských míst na univerzitě. Vydru to minulo – i císař musel povolit několik výjimek, a ty se týkaly právě matematiků, fyziků a astronomů. Vydra učil (od roku 1766) na Karlově (tehdy Karlo-Ferdinandově) univerzitě matematiku a astronomii, roku 1772 získal profesuru a stal se v obou oborech autoritou. Byl také děkanem filozofické fakulty a jeden čas dokonce rektorem univerzity. Počet studentů, kteří prošli jeho přednáškami, se odhaduje na deset tisíc. Pro náš příběh je důležité, že v roce 1784 nařídil císař, pořád ještě to byl Josef II., univerzitní přednášky v němčině místo v latině. To *Vydra* nedokázal překousnout – němčina ho dráždila, takže začal psát českou matematickou učebnici, která se jmenovala *Počátkové arytmetyky* (nebyla to první česká matematická kniha v historii, ta vyšla už v roce 1530, napsal ji Ondřej Klatovský a byla také o aritmetice). Vydra na knize pracoval několik let, a když v roce 1803 oslepl, diktoval text svému příteli, rovněž matematikovi, Josefu Ladislavu Janderovi (1776–1857). Kdo má dobré nervy, může někdy zkusit psát matematické vzorce podle diktátu – dlouho bude vzpomínat. Kniha vyšla Jandero-vou zásluhou v roce 1806. Vezmete-li v úvahu, že Dobrovského stěžejní knihy o tehdy exotické češtině, historie českého jazyka a literatury i česká mluvnice, vyšly v letech 1792 a 1809 (a obě byly psány německy, aby jim vzdělaný čtenář rozuměl), musíme před Vydrou i Janderou smeknout.

Díl I.
Začátky trvaly dlouho

…v domě tabulek jsi ho naučil sčítat a odčítat,
vysvětlil jsi mu záhady vědy.
Sumerský písař, 21. stol. př. n. l. (Den školáka)

Zavrženíhodné umění matematické
jest zakázáno především.
Kodex císaře Justiniána I.

V prvním dílu se setkáme s počátky matematiky. Byly, co se času týká, hodně dlouhé – první hmotné památky, které mohou mít matematický výklad, se datují do doby před 30 až 35 tisíci lety a díl končíme dobou, kdy se ze středověké vědy a středověké matematiky postupně začínala stávat věda novověká, tedy zhruba před půl tisíciletím.

Přinejmenším do pozdního středověku bychom mohli vystačit s dělením matematiky na *aritmetiku*, tedy na zacházení s množstvím, s čísly, a na *geometrii*, která se zabývá prostorovými a tvarovými vlastnostmi objektů. My, poučeni už dalším vývojem, do tohoto jednoduchého dělení vneseme další pojmy a podobory, mějme však na paměti, že tehdejší uživatelé matematiky se bez klasifikace na podobory vesměs obešli.

Dopustíme se ještě dvou anachronismů. Pro rychlejší orientaci v pojmech a vlastnostech se občas uchýlíme k jednoduchým vzorečkům. Ty lidé až do novověku neznali. A jako druhý anachronismus do našeho vyprávění zahrneme alespoň okrajově i logiku. Je to proto, že později, mnohem později, k ní přibylo adjektivum „matematická“, pro matematiku se stala něčím mezi důležitým nástrojem, samostatnou částí a jakýmsi „jazykovým a metodickým dohledem“. Dnes do matematiky, přesněji řečeno „nad“ matematiku nevyhnutelně patří. Pro lidi, o kterých bude tento díl, byla ještě filozofií se vším všudy – pokud vůbec tušili, že by logika mohla existovat jako samostatná věda.

1. Jak to asi mohlo začínat
(Pravěké náznaky matematiky)

Pravěcí lidé neuměli psát, takže se nezachovaly záznamy o jejich myšlenkách ani o jejich osudech. Můžeme se jen domýšlet podle velmi skromných hmotných památek a podle toho, co víme o dnešních primitivních kulturách. Bude proto rozumné nezapomínat, že se díváme očima moderního člověka na dobu, která měla přeci jenom trochu posunuté stupnice důležitosti a přijatelnosti pro problémy i pro jejich řešení. Chtě nechtě tak u řady hmotných nálezů nacházíme interpretace, které sice zpravidla odrážejí naše myšlení, ale nikdo neví, jestli odrážejí i úmysly jejich tvůrců.

Jeden závěr však můžeme přijmout nejspíš dost spolehlivě – myšlenkové pochody, které tady budeme vykládat jako zárodky matematického myšlení, sotva vznikly z nudy, rozmaru nebo z potřeby nějaké intelektuální bravury. Tehdejší lidé na něco takového neměli v každodenním boji o život čas. Potřeba nějak se vyznat v kvantitativních i prostorových strukturách, i když pro ně ani neměli jméno, byla skutečně životní potřebou. Řečeno jinými slovy, matematika už tehdy nebyla zbytečnost.

1.1 Zářezy, hromádky a množství

Z oněch dvou „jazyků" matematiky – aritmetického a geometrického – začneme prvním a pokusíme se uhádnout, odkud se vlastně vzal.

Nikdo neví a už se nikdy nedoví, kdy lidi poprvé napadly myšlenky, které se sice týkaly světa kolem nich, ale přitom do něj tak úplně nepatřily. Zabývaly se totiž něčím, co se nedalo ulovit nebo sebrat, ale ani vidět, a přesto to nějakým dráždivým způsobem bylo přítomno. Ne, nemám na mysli nadpřirozeno, nýbrž struktury, do kterých ty hmatatelné a viditelné věci sice zapadaly, ale netvořily je. Dlouho si lidé ani neuvědomili, že na něco takového myslí, možná až do poměrně nové doby, nicméně pokusy nějak měřit nebo zaznamenat množství nejspíš vznikaly už v kulturách a společenstvích hodně primitivních. Dnes je můžeme jenom tušit z několika hmotných artefaktů a ze znalosti zvyků „přírodních" kultur, které se snad příliš neliší od našeho vlastního pravěku.

Začneme hmotnými památkami. Jedna z nich pochází z našeho území.V roce 1936 našel Karel Absolon u Dolních Věstonic na jižní Moravě ve známém ležení lovců mamutů lýtkovou kost mladého vlka. Její stáří tehdy odhadl na 10 až 35 tisíc let a dnešní doba jeho odhad upravila na 25 až 28 tisíc let. Kost sama o sobě by ostatně nebyla nic vzrušujícího – takových se nachází víc. Tahle se však vyznačovala tím, že do ní byla vyryta řada příčných zářezů. Dají se rozdělit do dvou skupin, oddělených dvojicí delších čar – v první skupině jich je 20, ve druhé 25. Zatím u toho skončíme a půjdeme o pár tisíc kilometrů dál, do Afriky.

V roce 1960 se v nalezišti u osady Išango na břehu jezera Zaire našla kost paviána, také ozdobená zářezy. Byla citelně mladší – někdy z období 9 až 6,5 tisíc let před naším letopočtem, ale i to už je úctyhodné stáří. Zato byly zářezy organizovány (jiné slovo se snad ani použít nedá) mnohem složitěji. Příčné zářezy tvoří skupiny oddělené mezerami, a protože se nevešly za sebe, jsou ve třech rovnoběžných sloupcích. Počty zářezů ve skupinách a sloupcích vypadají, alespoň z pohledu dnešního člověka, pozoruhodně. V prvním sloupci jsou skupiny dělené vždy ještě na dvě podskupiny: (3, 6), (4, 8), (10, 5) a (5, 7) zářezů. Nebýt poslední dvojice, už by to vypadalo, že se někdo učil násobilku dvou. Ta poslední dvojice však jako by tematicky patřila do druhého sloupce, kde jsou čtyři prvočísla – 1, 13, 17, 19. Také v posledním sloupci jsou z poloviny prvočísla: 11, 21, 19, 9. Takže stojíme před otázkou proč?

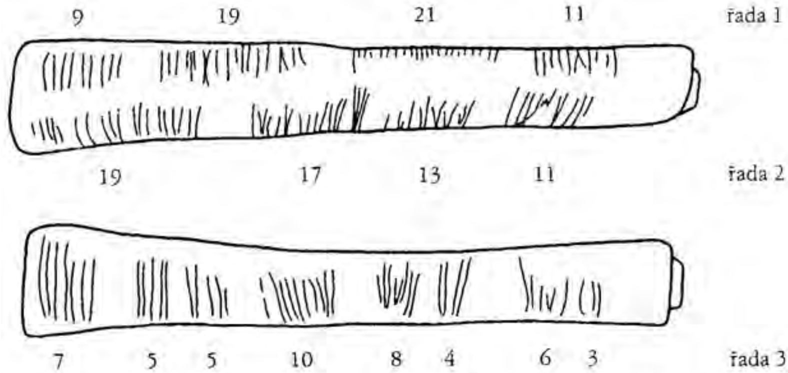
Do třetice se, zase v Africe, tentokrát u vesnice Lemombo ve Svahilsku, našla roku 1970 další kost. Patřila také paviánovi a stářím překonala i Absolonův nález – má být asi 35 tisíc let stará. Zářezy na ní tvoří jen jednu skupinu, a je jich 29. Je to sice také prvočíslo, ale mnohem lákavěji vypadá připomínka lunárního cyklu.[1] Nějaké podobné kosti se časem našly i jinde, nebyly už ale tak zajímavé, zářezy bylo možné zaměnit se stopami tesáků šelem a podrobnější údaje se mimo specializované nálezové zprávy těžko hledají. Ostatně to ani není nutné, ty tři zmíněné kosti – a hlavně první dvě z nich – stačí naši fantazii zaměstnat až dost.

Až potud jsme nálezy popisovali tak, jak se jeví na pohled. Upřímně řečeno neubránili jsme se při tom dnešní interpretaci – soustřeďujeme se na počty zářezů a ignorujeme jiné výklady. Teoreticky je tady pořád možnost, že to mají být výtvarná dílka či amulety, nebo že vůbec nevznikly jako záměrné kompozice, nýbrž jen náhodně – nějaký lovec se u ohně prostě nudil a na vyřezání Venuše byla kost moc tenká. Pravděpodobné to však není.

Nuže, co nás, s dnešními znalostmi, napadá při pohledu na počty zářezů? „Absolonova“ kost je jednodušší a jediné, čeho si na ní všimneme, je, že obě skupiny jsou násobky pěti. Při obvyklém počtu prstů na ruce by počítání v pětkové soustavě nemuselo překvapit, není ale jasné, proč by si měl autor „počítadla“ zaznamenávat právě násobky základu číselné soustavy. Navíc početní soustavy dnešních primitivů často nesahají ani k těm pěti.

To druhá kost, ta z Išanga, je inspirativnější. Především nás asi zarazí poměrně hojný výskyt prvočísel.[2] Jenže hned v dalším kroku se musíme zeptat, zda se něco takového dá někdy před deseti tisíci lety předpokládat. V dnešní matematice se k prvočíslům dostáváme přes dělení a dělitelnost, není to však jediná cesta. Prvočísla představují množství, které už nelze rozdělit na několik stejných dílů. Mohlo se to členům pravěké tlupy hodit a byla ta potřeba tak naléhavá, že vedla až k primitivním záznamům? Aby toho nebylo dost, zjistila mechanoskopická analýza, že těch 158 zářezů v 16 skupinkách bylo uděláno 39 různými nástroji – buď šlo o postupné záznamy, nebo jsme svědky první kontroly kvality pazourkových břitů. Evidence množství hodně podobná pravěkým zářezům na kostech se zachovala dodnes a někdy ji v podobě čárek na papíru (nebo na pivním tácku) viděl nebo použil asi každý z nás. Etnografové „pamětním“ zářezům na kouscích dřeva říkají vrubovky a jejich užívání mělo v zemědělském prostředí svá pravidla. Otázka, na kterou se ale těžko hledá odpověď, je, co potřebovali potulní lovci zvěře evido-

[1] Synodický měsíc trvá 29,530 588 dne.
[2] Pro úplnost – jsou to přirozená čísla, dělitelná jenom jednotkou nebo sama sebou.



Kost z Išanga z obou stran

vat. Svůj „majetek“ měli na sobě nebo ho nesli v ruce, a jak na tom byli se zásobami, bůh suď.

Trochu světla do našich otázek vnesly poznatky etnografů získané u některých primitivních kmenů. Setkali se s domorodci, kteří ani neznali pojmy jako počet, nebo dokonce číslo. Žili ale usedle v osadách, lovili ryby, trhali ořechy a uměli je „spočítat“. Ke každé rybě (nebo ořechu) položili hůlku, a když s tím byli hotovi, shromáždili hůlky v dlani – „tolik“ měli ryb. Zdá se to být nic moc, je to ale ve skutečnosti ohromná věc a nakonec nás může smířit i s pravěkými nařížnutými kostmi. Klacíky dnešních domorodců totiž představují první matematickou strukturu. Ještě pro ni nemají slovo, nevědí, že uvažují o „počtu“, avšak uvažují o něm – vycítili, že je tady něco, nějaká vlastnost nebo kvalita, do které se dají dosadit ryby, klacíky, ořechy či mušle nebo cokoli jiného, a pořád to bude ona. Možná že ji vycítili i ti pravěcí lovci z Věstonic nebo Išanga a nejspíš i mnohde jinde, jenže jejich vrubovky se nezachovaly – třeba proto, že byly ze dřeva. Až mnohem dál se dočteme, že na „metodu hrsti klacíků“ navázali, desítky tisíc let po věstonických lovcích, tvůrci moderní teorie množin, kteří sotva kdy četli o Mamutíkovi.[3] Objev množství byl nejspíš první matematický objev, který lidé udělali. Jeho první zvládnutí trvalo nějakých třicet tisíc let – možná i déle, ale nakonec se vyplatilo.

1.2 Čáry, plochy, oblouky a kameny

Je tady ještě geometrie. Také její začátky vyžadovaly, aby se lidé začali chovat do té doby nezvykle. Stejně jako se v jejich světě vyskytovala množství, vyskytovaly se v něm i tvary a také tady se dá něco usoudit (a něco hádat) z archeologických nálezů i z toho, co víme o novověkých primitivních komunitách.

Přijatelně jednoznačné památky jsou spojeny až s usedlými zemědělskými civilizacemi – ty totiž potřebovaly vyměřovat pole a složitější stavby. Nicméně i potulní lovci a sběrači museli mít (a ti dnešní mají)

[3] *E. Štorch: Lovci mamutů.*

nějakou představu o vzdálenostech a směrech. Geometrie to ještě tak úplně není (stejně jako hrst klacíků ještě není aritmetika), ale krok správným směrem už ano. Možná že představy pravěkých lovců o prostoru a ploše byly dokonce o něco subtilnější, než si dnes většinou myslíme. Jeden z klasiků paleolitické archeologie a především největší znalec jeskynních maleb abbé Henri Breuil (1877–1961) zjistil, že obrazy zvířat v jeskyních nejsou izolované, ale respektují jakási schémata – v různé vzdálenosti od vchodu převládají různé druhy. Pravda, může to být náhoda, může to být i neúmyslný odraz proměnlivého složení lovné zvěře a postupu „malířů“ dál do jeskyně (nebo naopak ke vchodu) a moderní analogie, o které bychom se mohli opřít, nejsou k dispozici.[4] Nicméně zajímavé to je. Vraťme se však k usedlým civilizacím.

Nejprve moc geometrie nepotřebovaly – nevelké políčko mělo takový tvar, aby šlo dobře obdělat,[5] prostá chatrč se stavěla také bez plánů a vyměřování – tvar byl dán vlastnostmi stavebního materiálu a dostatečně kruhový nebo obdélníkový půdorys se zvládl i odhadem. Jak ale postupoval vývoj a zemědělských osad přibývalo, bylo nutné vyměřovat pole přece jenom přesněji a při stavbě zavlažovacích kanálů postupovat plánovitěji. Důležitou roli jistě hrálo to, že se začínalo jednat o terénní úpravy, které se už nedaly řídit „od oka“ – jedním pohledem se totiž přehlédnout a vyhodnotit nedaly. Když pak vznikaly osady tak velké, že si pomalu zasloužily název města, a budovy, kterým se dalo říkat spíš paláce a chrámy, bez vyměřování to skoro jistě nešlo. Tehdy ale končil pravěk a začínal starověk, a o něm bude řeč v příští kapitole.

Téma, u kterého se pisatelé obvykle s chutí zastaví, jsou megalitické stavby. Nejen v Anglii a v Bretani, ale v jižní Evropě vůbec (romantici tvrdí, že i u nás – kdo ví?) jich existuje poměrně hodně, i když u některých, třeba na Korsice, člověku to „mega“ připadá trochu nadsazené. Typickým příkladem je superstar mezi megality – Stonehenge, postupně vztyčená mezi lety 1900 a 1400 před naším letopočtem.[6] Nejen romantici, ale i celkem uvážliví lidé už dnes považují za jasné, že její tvůrci, neolitičtí zemědělci, stavbu poměrně přesně rozměřili. Poslední slovo je důležité – geometrie totiž nezačíná tím, že věci mají tvar, ale až tehdy, když od nich tvar oddělíme a pracujeme s ním – „měříme“ ho nezávisle na tom, jestli se týká kusu pole, řady kamení, cest nebo kanálů. Poslední věty by nám měly znít povědomě – něco podobného už jsme si říkali o hromádkách a počtech. I dnes se dá najít, kam tvůrci různých „-henge“ upevnili konec provazu, když vyměřovali oblouk, jak na sebe oblouky navazovali nebo jak zvládli rovnoběžky. Záměrně se tady vyhneme interpretacím čar, kterými je možné propojit některé body megalitických

4 Kresby australských domorodců, které by se daly s trochou dobré vůle označit za skoro současné, jsou zpravidla v mělkých výklencích, kde by dělení na polohu blíž a dál od vchodu bylo umělé.

5 Jen pro zajímavost – vynález kypřicího háku místo motyky a domestikace zvířat použitelných k jeho tahu změnily tvar políček ze zhruba čtvercového na podélný.

6 Podle nalezené keramiky se o to nejspíš zasloužili nositelé „kultury zvoncových pohárů“, kteří někdy po roce 2800 př. n. l. přišli na Britské ostrovy z kontinentu.

Neolitická geometrie
ve Stonehenge

staveb se stanovišti v okolí a přes ně s azimuty východů některých hvězd v určitých dnech roku. Je dost dobře možné, že jenom s některými by jejich stavitelé souhlasili;[7] řada z nich by pro ně byla asi dost velkým překvapením. I bez oné interpretace to ale vypadá, že kromlechy[8] nevznikly „od oka“, že byly změřeny – tomu už můžeme říkat geometrie s čistým svědomím.

Komentář si zaslouží také to, co se traduje o pravých úhlech a znalosti *Pythagorovy věty*. Nuže, každý pravoúhlý trojúhelník v rovině má strany, jejichž délky splňují Pythagorovu větu. V tomto smyslu není existence více méně pravoúhlých objektů ještě sama o sobě důkazem, že lidé už tehdy Pythagora významně předběhli. Nicméně některé pravoúhlé trojúhelníky mají strany, jejichž délky se vůči sobě dají vyjádřit v celočíselných poměrech. Skoro každý zná populární trojici (3, 4, 5), někdo možná i (5, 12, 13), trojice (20, 21, 29) nebo (12, 35, 37) už člověk musí najít ve specializovaných tabulkách a labužníky asi potěšíme trojicí (99, 4 900, 4 901) – tu ale v pravěku zaručeně nikdo nepoužíval. Zřejmě už tehdy ze zkušenosti věděli, že když na delší provaz uváží

[7] Skepsi vzbuzuje i názor, že zemědělci potřebovali přesný kalendář kvůli načasování zemědělských prací. Že je jaro, věděli i bez megalitů, a moudrý zemědělec nezačíná orat podle východu nepříliš nápadné hvězdy ve vizíru mezi dvěma kameny, ale podle toho, jak po zimě proschlo pole. Je to jako s pranostikami – český rolník, který by oral vždy přesně na svatého Řehoře, by nadělal hodně radosti folklorním sběratelům z města, ale svou rodinu by postupně přivedl mezi vesnickou chudinu.

[8] Oživme si terminologii megalitů: menhir – osamocený svisle stojící kámen; kromlech – uspořádaná řada nebo kruh menhirů; dolmen – „stolově“ uspořádané kameny.

v pravidelných vzdálenostech 13 uzlíků, ty krajní dají k sobě, dva další (správně vybrané) uchopí a celé to napnou, pravý úhel dostanou. Existence ploch a staveb, na kterých je poměr 3 : 4 : 5 nebo 5 : 12 : 13 mezi některými rohy nebo kůly patrný, se dá brát jako dobrý argument pro užívání právě popsaného postupu.

Máme-li to shrnout, udělali naši pravěcí předkové i první kroky ke geometrii. Ty nejnápadnější v době, kdy už k historickému období nebylo daleko.

1.3 Počítali?

Tak to je otázka, o které se můžeme dohadovat, ale nejspíš ji nikdy úplně nerozhodneme. Nezapomínejme, že pořád ještě mluvíme o pravěku, době před vznikem písma, a že to, čemu dnes říkáme počítání, většinou nějaké záznamy nebo pomůcky potřebuje. Také bychom si měli ujasnit, čemu že tak vlastně chceme říkat.

Pokud to slovo použijeme pro manipulaci s množstvím, a ne jenom pro jeho prostou evidenci třeba pomocí vrubovek nebo hrsti klacíků, pak v pravěku asi moc nepočítali. Dá se soudit, že možná čas od času spojili dvě hromádky dřívek nebo vedle sebe položili dvě vrubovky a dostali zase hromádku dřívek (nebo jakousi metavrubovku) a nejspíš si o tom něco mysleli. Také je pravděpodobné, že uměli porovnávat, která ze dvou hromad je větší nebo která ze dvou řad zářezů delší – nejspíš jim k tomu ale stačil pouhý pohled, v nejlepším případě položení dvou vrubovek vedle sebe. Pokud se moderní etnografové vůbec zmiňují o „matematických“ zvyklostech, vcelku nebývají s právě ukončenou úvahou v rozporu.

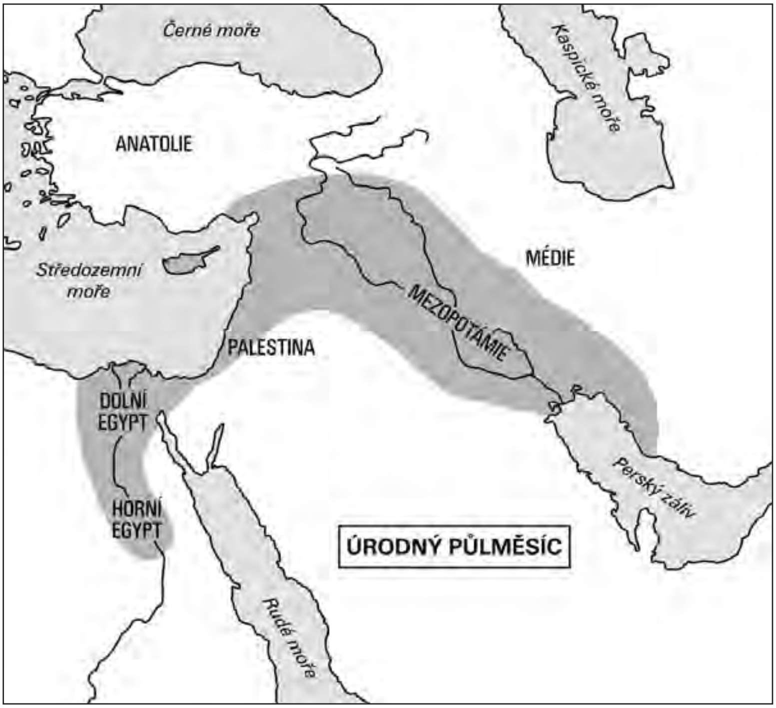
To spíš je zajímavé, jaká množství uměli zvládnout – jinými slovy, „do kolika“ počítali? Moderní analogie jednoznačně ukazují, že primitivní národy, pokud vůbec potřebují odlišovat množství, začínají u pojmů „jeden, několik“, častěji v podobě „jeden, hodně“. Později (a netrvá jim to většinou až tak dlouho) svou „číselnou“ řadu rozšíří na „jeden, dva, několik“, a u toho nějakou dobu vydrží – buď mají nějaký předmět jeden, nebo ještě jeden, nebo už pak přestávají být rozdíly zajímavé.[9] Další jména pro počet pak postupně přibývala až se zpožděním a nejprve se jednalo o nevelká přirozená (tedy celá kladná) čísla. Pokud potřebovali nějak mluvit o konkrétním větším čísle, různě spojovali malá čísla podle vzoru „jedna“, „dva“, „jedna-dva“, „dva-dva“.

Člověka s našimi návyky a s naším školním výcvikem nejspíš zarazí, že primitivní počítání nezačíná od dvojice „nic, něco“. Je to tak – „nic“ prostě nevnímali jako množství, co neexistovalo, to nemělo smysl nejen počítat, ale ani pojmenovat číslem. Přitom si samozřejmě museli lidé

[9] Zatahování historických analogií do prehistorie je riskantní, ale pokusme se o to. Dokonce ani staroslověnština a staročeština ještě neměly jen číslo jednotné a množné, ale mezi nimi byl duál pro dvojice. Jeho zbytečky užíváme dodnes (rozlišujeme oči – oka, uši – ucha), ale náš cit pro rozdíl mezi nimi už trochu tápe.

odpradávna uvědomovat nepřítomnost věcí, které by podle jejich zkušeností přítomny být měly – lovných zvířat, dřeva na oheň, lesních plodů. Ale „nic“ jako množství, které se dá také počítat, přišlo lidem na mysl o tisíce let později, po dlouhém civilizačním vývoji.

Úrodný půlměsíc



2. Když známe slova a letopočty

(Starověké městské civilizace úrodného půlměsíce a matematika)

Historikové se většinou shodují v tom, že dějiny začínají se vznikem písma a tím i schopnosti zaznamenávat údaje nad hranice dané kapacitou lidské paměti. Jistě, existují tichomořští domorodci, kteří jsou schopni zpaměti recitovat dlouhé řady svých předků, představují ale výjimku. Je přirozené, že ani objev písma se neodehrál naráz, myšlenka na ně přicházela po etapách a je zajímavé, že u těch prvních pokusů často stálo něco příbuzného matematice. Už jsme na to narazili v předchozí kapitole – hůlky, uzlíky nebo kosti se zářezy sice opravdu ještě nejsou písmo, stejně jako jím nejsou ani rytiny zvířat nebo votivní figurky, jsou však výrazem snahy posunout přirozenou paměť a verbální komunikaci o něco dál, než kam sahají její přirozené možnosti. Dokonce i znaky pro čísla v prvních abecedách mají něco společného se zářezy na vrubovkách – jsou to sledy teček nebo čárek, odpovídající zaznamenanému množství – a jen ty, které by už byly nepřehledné, jsou nahrazeny jakýmsi zástupným znakem. Občas se ten první z nich týká pěti a připomíná dlaň.

Ukážeme si, co písmo udělalo s matematikou v několika z oněch civilizací, které se k němu dopracovaly první. Po zvládnutí prostého záznamu čísel přišlo období zacházení s nimi, doba, kdy matematika nebyla nic víc než souhrn dovedností a návodů, jak postupovat při počítání nebo měření. To ale nemělo trvat věčně – matematika v sobě nesla potenciální schopnost být něčím větším, zobecňovat, vytvářet svůj vlastní svět. Je sice součástí našeho každodenního života, ale popisuje ho z jiné strany.

Z prostředí, kterému je věnována tato kapitola, ještě nemáme většinou zachycena jména těch, kdo matematické myšlení tvořili. V despociích byli hodni zaznamenání především obzvlášť výkonní hrdlořezové a ničitelé, zejména pokud měli na hlavě královský diadém. Objevitelé a tvůrci jaksi patřili k personálu. Nicméně tam byli a díky jejich dovednosti nakonec víme i o těch královských zabijácích.

Matematika je bohatá na poznatky, a vyčerpávající souhrn alespoň těch hlavních objevů i s popisem, odkud se vzaly, by rozsahem přesáhl celou polici knih, jako je tato. Musíme se tedy spokojit s výběrem toho klíčového. V našem případě toho, co odkrývalo významná prázdná místa v lidských znalostech a nejvíc přispívalo k jejich zaplnění. O pradávné historii, kde často chybí jména vědců, to platí tím spíš.

2.1 Mezopotámie

Název oblíbené knihy o archeologii[10] říká, že na počátku byl Sumer – jeho obyvatelé zřejmě jako první začali používat písmo hodné toho jména. Být první, to má své nevýhody i výhody. Na jednu stranu se objevitel pořádně nemá oč opřít, nejsou k dispozici zkušenosti a zaběhlé standardy, na druhé straně však všechno, co udělá, je vlastně objev a tvoří východisko pro ty, kdo přijdou po něm. Ti se s ním mohou ztotožnit nebo ho popírat, sotva ho ale mohou přehlížet.

Nejprve bychom si měli trochu osvěžit paměť. O kterých zemích, lidech a dobách tady vlastně mluvíme?

První jednoznačné písemné doklady o počátcích matematiky vznikly v povodí řek Eufrat a Tigris, zhruba na území dnešního Iráku. Krajina byla (a je) součástí takzvaného „úrodného půlměsíce“, tedy území od Egypta přes Kypr, Izrael, Perský záliv až k podhůří Íránské vysočiny, kde vznikly první městské civilizace, lidé tam vyšlechtili první obilí, a aby ho mohli pěstovat, museli vytvořit nejen závlahy, ale i organizaci, která je uměla zařídit.

Úrodná půda a teplé podnebí tady poměrně brzy, ještě dávno před vynálezem písma, vyprovokovaly vznik zemědělství. Trvalé osídlení (které si obvykle spojujeme se zemědělstvím) je prokázáno už někdy kolem roku 8000 př. n. l. a monumentální stavby v El-Obejd a Uruku se datují do období mezi 4500 a 4100 př. n. l. V té době už se budovalo (a organizovalo – na to nezapomínejme) zavlažování. Na to byly vybírány naturální daně a budována skladiště na jejich uložení. Celá organizace se

[10] Vojtěch Zamarovský: *Na počátku byl Sumer*. Mladá fronta : Praha. 1966.

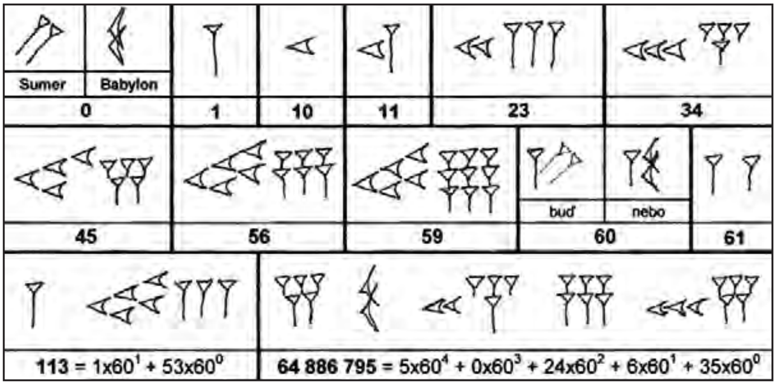
neobešla bez vyměřování a nejspíš i počítání, i když zatím bez existence písma – množství byla zaznamenávána značkami, ne nepodobnými vrubovkám.

Období, které nás zajímá nejvíc, sahá trochu před rok 3500 a trvá někam k roku 500 před naším letopočtem, kdy Mezopotámii ovládli Peršané. Mezopotamská kultura samozřejmě pokračovala, ale to hlavní už se dělo jinde, v Řecku. I tak zdejší civilizace vlastně bez přestávky ovlivňovala vývoj matematiky v celém období raného starověku a všechno podstatné, co se tehdy v matematice stalo, mělo původ nebo analogii v Mezopotámii. Její území bývá tradičně děleno na Asýrii na severu a Babylonii na jihu, a i v té se ještě rozlišuje severnější Akad a jižnější Sumer. Za ty tři tisíce let v Mezopotámii vznikla (a zase zanikla) řada městských států i říší. My se zmíníme jen o těch, které přispěly nějakým užitečným nápadem do vznikající matematiky.

Když kolem roku 3500 př. n. l. přišli Sumerové, našli už kultivovanou zemi a v její kultivaci pokračovali. Přitom používali pro evidenci zásob o něco propracovanější náhradu vrubovek. Vypadala tak, že bylo normalizované množství každého druhu výrobků reprezentováno jakýmisi „žetony“ – kostkami, kuličkami, kužely z usušené hlíny nebo z kamínků, často ještě odlišenými grafickým symbolem na povrchu. Ty se ukládaly do „obálek“, samozřejmě opět hliněných.

Aby nebylo nutné při každém výpadku paměti rozbíjet starou obálku a sušit novou, bylo na jejich povrchu v jednoduchých grafických symbolech označeno, kolik a jakých „žetonů“ v nich je. Sumerští účetní asi museli cítit zvláštní druh uspokojení, když po otevření obálky uvnitř našli opravdu to, co už zjistili při prohlídce jejího povrchu. Jinak je totiž těžké si vysvětlit, že jim teprve po několika staletích došlo, že kuličky a kostky uvnitř obálek jsou tam vlastně navíc – celá informace je už v čarách zvenku.

To už se však v Uru, Uruku a Kiši užívalo první písmo. Ještě to nebyly ony proslavené klínky, ale piktografické znaky, ryté do vlhké hlíny. Datování nálezů není ve všech pramenech stejné, ale u nejstarších památek nejspíš můžeme časovému zařazení kolem roku 3300 př. n. l. věřit. Podle ustálenosti piktogramů se dá soudit, že nějaké méně trvalé záznamy vznikaly dokonce o něco dřív. Mezi nejstaršími zápisy byly i znaky pro čísla, jednoduché vpichy a čárky. Přechod od piktografického ke klínovému písmu byl otázkou času – kolem roku 2900 př. n. l. nebo krátce před něj se datují první archaické klínopisné tabulky a po roce 2750 př. n. l. vznikají klínopisné texty. Uvážíme-li techniku psaní do placek z vlhké hlíny, je rychlý přechod přirozený (aby nedošlo k omylu, klínové písmo se nevyrývalo, ale vymačkávalo seříznutým stéblem rákosu). Klínopis měl i znaky pro čísla až do 59 a na pohled je jejich čtení poměrně logické. O číselných soustavách si něco víc řekneme v příští kapitole, tady jen tolik, že ta mezopotamská (častěji se píše babylonská) kombinovala desítkovou a šedesátkovou soustavou a byla dobře promyšlená. Teď nás bude spíš zajímat, jací byli Asyřané a Babyloňané počtáři.



Ukázka babylonských klínopisných čísel

Na to není snadná odpověď. Na naší střední škole by nejspíš neoslnili znalostmi, ale jistě by zaujali vynalézavostí. Na to, že prošlapávali dosud neznámou cestu, byli úžasní. Nezapomínejme, že ještě neznali početní algoritmy, které se učí děti na nižším stupni našich škol – násobení a dělení vícemístných čísel, se vším tím psaním mezivýsledků pod sebe a dalšími fígly. Na to přišli až Arabové o tři tisíce let později. Neznali vzorečky (nebo „počítání s písmenky“ v dnešním školáckém slangu), s nimi začínali postupně pracovat až renesanční matematici. Každý početní postup si nacvičili na konkrétních číslech a předpokládalo se, že s jinými čísly už to budou umět stejně. Patrně neměli termín pro „vědu“ v našem smyslu slova, chápali však, co to znamená „vědět“, a vědění se učili ve školách, kterým se říkalo „domy tabulek“ – jsou tím míněny ty hliněné a popsané. K vědění patřilo lékařství, právo a také počítání.

Sčítání a odčítání zvládali poměrně zručně a většinou z hlavy nebo jednoduchými postupy, které jim jejich číselná soustava umožňovala. Pro početní úkony, které nešlo zvládnout zpaměti, používali tabulky. Protože čísel je hodně (to věděli i oni), museli by mít například pro násobení a dělení neuvěřitelné množství tabulek se součiny a podíly (zlomky už znali, i když je psali jinak než my). Proto se jejich počtářské dovednosti soustředily na to, jak se obejít s co nejmenším množstvím tabulek.

Například součin dvou čísel uměli převést na počítání s druhými mocninami a jednoduché vydělení. V dnešních vzorcích by to bylo

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4},$$

takže jim stačily jen tabulky druhých mocnin. Podobně dělení zvládli pomocí násobení převrácenou hodnotou čísla ve jmenovateli, takže místo tabulek na dělení jim stačila tabulka převrácených hodnot. Jejich číselná soustava uměla přepsat zlomky, které dnes píšeme se zlomkovou čarou a jedničkou v čitateli, způsobem blízkým dnešním desetinným zlomkům, a pokud to někdy nešlo (třeba 1/7 nebo 1/11, které se nedaly vyjádřit pomocí násobků jedné šedesátiny), měli je v tabulkách alespoň zaokrouhleně. Tabulky měli i na třetí mocniny, na druhé a třetí odmocniny a na součet druhé a třetí mocniny. V konkrétních případech uměli řešit úlohy, které vedou k lineárním rovnicím i rovnicím vyšších řádů – neměli pro ně ale obecný analytický návod, jen se dokázali postupnými kroky k řešení libovolně přiblížit. Uměli počítat úroky, což dnes chápeme jako schopnost pracovat s geometrickými posloupnostmi a řadami. Při počítání neznali naše algebraické symboly, jako je +, – ,= , /, a vyjadřovali je slovy. I když vezmeme v úvahu, že na vývoj toho všeho měli dost času, je to na úplné začátečníky úctyhodný výkon.

Zprávy o babylonské geometrii se hledají mnohem hůř. Jeden z důvodů je v tom, že v jejich době se geometrie tak úplně do matematiky nezařazovala, to rázně změnili až staří Řekové. Sumerové i Babyloňané museli geometrii znát a používat – výborní astronomové a pozorovatelé hvězd potřebovali znát a měřit úhly, stavitelé zavodňovacích soustav museli umět zeměměřičství, stavitelé zikkuratů, vysokých hradeb a paláců zase vyměřovat nejen půdorysy, ale i stěny a výšky. Jedna z hlavních potíží byla v materiálu, na který psali a na který by případně měli rýsovat. To na hliněné desky opravdu nejde, a to mluvíme o „parádních" kouscích, které se reprodukují v knihách o kultuře středního východu – pro běžnou potřebu psali svými rákosy na jakési hliněné vdolky nebo placky. Pokud u Sumerů narážíme na geometrické úlohy, jsou to vesměs číselné výpočty délek, vzdáleností, úhlů nebo poloh a geometrie je u nich spíš v motivaci než v provedení. Počítali plochy čtverce, trojúhelníku, lichoběžníku a pravidelného pětiúhelníku i šestiúhelníku, uměli spočítat také objemy jednoduchých těles – koule, krychle, válce – jehlan je nezajímal (nestavěli pyramidy). Zřejmě zvládali vytyčit geometrický obrazec v terénu, rýsování pro ně ale bylo přinejmenším exotické. Věděli také, že obvod a průměr kruhu má stabilní poměr. My ho označujeme řeckým písmenem π, oni pro něj jméno neměli, ale položili ho roven číslu 3. Chyba okolo 4,7 % nesvědčí o tom, že by jim na přesnosti nějak moc záleželo, ale pro běžnou potřebu nejspíš byla uspokojivá. Navíc později hodnotu čísla π zpřesnili na 3 + 1/8, tedy 3,125, a chyba půl procenta už by byla přijatelná i pro dnešní stavaře. Znali Pythagorovu větu, dokonce patrně v obecném tvaru, a měli tabulky na patnáct trojic pythagorejských čísel.[11] I z toho je zřejmé, že matematika pro ně znamenala výpočty a čísla – obrazce a tělesa byly jen objekty, kterých se ta čísla týkala.

Heslo I. Číselné soustavy

Při popisu sumerské matematiky jsme narazili na pojem „číselná soustava", který budeme potkávat častěji. Řazení čísel do skupin a jejich zápisy mohou být v různých počtářských kulturách různé a hodně na nich záleží, jak dobře nebo špatně se s čísly dá pracovat. Třeba množství, pro které máme slovo *osm,* můžeme napsat arabskou číslicí **8**, římskou **VIII**, staří Řekové by to psali η (písmeno éta) a v ještě starší archa-

[11] Připomeňme si, že to jsou trojice celých kladných čísel, odpovídající vzorci z Pythagorovy věty.

ické řečtině ΓIII, Mayové zase $\underline{\bullet\bullet\bullet}$. Pokud měl věstonický lovec při řezání do oné vlčí kosti na mysli množství, tak by nejspíš užil ||||||||. Až potud je to spíš otázka zvolené „abecedy“. Věci se ale dost komplikují, jestliže máme zaznamenat čísla příliš velká, než aby se vyjádřila jedním přehledným symbolem. Třeba množství *čtyři sta dvacet jedna* píšeme dnes **421**, římským systémem to je **CDXXI**, v archaickém Řecku **HHHHΔΔI** a v klasickém υκα nebo **YKA**. Znamená to, že si musíme vymyslet celou metodu, říká se jí číselná soustava, podle které jednotlivé číslice řadíme.

Začneme tou, kterou známe nejlépe a ve které se dobře orientujeme – má základ v arabských číslicích a její kořeny vytvořili už Indové, i když jejich číslice měly jiný tvar. Umíme s ní zacházet, a tak se hodí za vzor pro pochopení ostatních. Napíšeme-li například číslo **423**, víme, že cifra **3** znamená počet jednotek, cifra **2** je počet desítek a cifra **4** počet stovek. Pokud užijeme mocniny, tak sto je 10^2, desítky jsou 10^1 a jednotky jsou 10^0. Číslo, jednoduše zapsané v indo-arabské soustavě, se pak dá, kdybychom to potřebovali, i spočítat:

$$4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = \mathbf{423}.$$

Celá soustava je tak opřena o číslo 10 a jeho mocniny. Ze školy víme, že to funguje i za desetinnou čárkou. Mocniny tam jsou 10^{-1}, 10^{-2} a tak dál pro desetiny, setiny… Proto naší soustavě říkáme *desítková* nebo také *dekadická*. Díky počtu dostupných prstů (když lidé začali nosit boty nebo byli líní se při počítání shýbat) je desítková soustava mimořádně oblíbená, i když jinak by se našly soustavy šikovnější.[12]

Ještě jedna vlastnost naší číselné soustavy si zasluhuje pozornost – je totiž navíc *poziční*, což znamená, že každý *řád*, tedy každá mocnina desítky, má v zápisu čísla svou pevnou pozici. Stovky jsou třetí před desetinnou čárkou, miliony sedmé, desetiny jsou hned za ní a tak dál. To velmi usnadňuje početní postupy – schválně se zamyslete, jak byste v nepoziční, římské soustavě písemně počítali součet CIX + MDIII (109 + 1 503), a to jsou ještě poměrně přehledná čísla. Současně však poziční soustava staví tvůrce číslic před problém: co dělat, jestliže některý řád zastoupený není? Jak bychom zapsali číslo, které se spočítá podle schématu

$$4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0.$$

Tady potřebujeme značku pro prázdné místo uvolněné onou chybějící mocninou desítky. My tam píšeme nulu a výsledek počítání podle popsaného návodu je **403**. Je to názorné a v souladu s tím, co jsme si řekli o něco výš, protože

$$4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = \mathbf{403}.$$

[12] Hlavně pro praktické počítání. Základ 10 se dá beze zbytku dělit jen čísly 2 a 5, zatímco třeba základ 12 je dělitelný čísly 2, 3, 4, 6 a snadno se z něj počítá nejen polovina, ale i 2/3 nebo 3/4, aniž bychom se museli uchýlit ke zlomkům. Pro lidi, kteří ještě často počítali z hlavy, to byla znatelná výhoda.

Takové značce se říká *poziční nula* a neměli bychom si ji plést s obvyklou nulou s významem „nic“ jako prázdné množství (i když zrovna v „naší“ indo-arabské soustavě jsou si oba významy, díky předchozímu výpočtu, hodně blízké). Tvůrci pozičních soustav byli obvykle nuceni objevit „svou“ nulu mnohem dříve, než přišli na to, že i „nic“ je množství.

Podobně jako desítka může být základem číselné soustavy jakékoli celé kladné číslo. Je-li jím například 5, pak poziční zápis v pětkové soustavě **423** znamená (je-li vyjádřen v „našich“ desítkových číslicích) číslo

$$4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 4 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1$$

a to v desítkové soustavě znamená množství *stotřináct*. Je zřejmé, že v žádné soustavě nemůžeme použít číslici se stejnou nebo větší hodnotou, než je základ soustavy. V pětkové soustavě tak jsou nepoužitelné cifry 5, 6, 7, 8 a 9.

Díky počítačům poměrně populární *dvojková* (binomická) soustava tak má jenom cifry 0 a 1, přičemž nula je (nezapomínejme na to) poziční. Dvojkové číslo **101001** tedy znamená (v našem desítkovém počítání) totéž jako

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 8 + 1$$

a v našem obvyklém desítkovém vyjadřování to je 41.

Teď jsme připraveni na to, abychom si řekli, jakou soustavu měli staří Sumerové a Babyloňané. Vypadala složitě, ale měla své světlé stránky. Především, a to je velká zásluha Sumerů, byla poziční. Objevili poziční zápis a dali nám spolu s Araby a Indy čísla, se kterými se dá přiměřeně snadno počítat.

Její základ byl kombinovaný – až do hodnoty 59 byla soustava *desítková*, takže se s nevelkými čísly počítalo poměrně přehledně. Pak přecházela na *šedesátkovou* (má i odborný název *sestadecimální*), kde byly jednotlivé pozice vyhrazeny číslům $60^1 = 60$, $60^2 = 3\,600$, $60^3 = 216\,000$… Trochu to na první pohled zastrašuje rychlým růstem hodnot, ale jde spíš o nezvyk a v kombinaci s desítkovými kroky pro menší řády je soustava nakonec hodně pohodlná, o to pohodlnější, že číslo 60 je snadno dělitelné mnoha frekventovanými čísly (2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30), díky tomu vychází hodně důležitých podílů jako celá čísla. Ostatně, převzali jsme od Sumerů šedesátkovou soustavu pro počítání minut a vteřin, a nestěžujeme si.[13] V Mezopotámii také jako první užívali poziční nulu. Ne hned, nejprve doufali, že vynechaný řád bude možné poznat ze souvislostí, pak jim došlo, že si mohou ušetřit práci, když místo něj udělají v cifrách větší mezeru, a nakonec opravdu vymysleli skutečnou poziční nulu. Její grafická podoba se podle doby a teritoria liší – užívali pro ni buď dvojitý šikmý klín nebo dva široké klíny.

Když už se věnujeme číselným soustavám, měli bychom si vyjasnit ještě jednu věc. Každá soustava má sice omezený počet cifer, desítková

[13] A že kombinovali víc soustav dohromady? Britové ještě nedávno bez problémů platili pencemi, šilinky a librami, 12 pencí byl šilink, 20 šilinků byla libra (a aby to nebylo nudné, 21 šilinků byla guinea), a docela jim vadilo, když si měli zvykat na libru za 100 pencí.

jich má například i s nulou deset, může jimi ale vyjádřit jakékoli množství. Alespoň pokud je poziční, u nepozičních soustav už tomu tak nebývá vždy. Existuje však i jiné počítání, ve kterém je omezený nejen počet číslic, ale i čísel, která jsou k dispozici. Pokud bychom chtěli názornou představu, stačí se podívat na číselník hodin (ať raději nejsou digitální – funguje to na nich sice také, ale není to tak vidět). Tam, pokud nám na zdi nevisí nějaká výtvarná schválnost, máme jenom dvanáct čísel, a z těch neutečeme. Můžeme je sčítat i odčítat, ale pořád budeme jenom v nich. Na běžných hodinách

$$8 + 6 = 2,\ 4 - 7 = 10,\ 11 - 12 = 11.$$

Pozor, to není dvanáctková číselná soustava – na ciferníku máme symboly té desítkové. To jsme ve dvanáctkové algebře.[14] Má svoje zvláštnosti i svůj půvab, hodně lidem ale dělá problémy, když narazí na literaturu o počítačích. Čísla, pokud jsou v počítači zobrazována, bývají často ve dvojkové soustavě, o které byla řeč před chvílí a ve které se dá zapsat jakékoli množství (v mezích povolených konstrukcí počítače). Současně ale v teorii konečných automatů přichází ke slovu dvojková algebra – systém pouhých dvou stavů, které se sice dají všelijak skládat, ale výsledkem může být zase jenom jeden z nich. Při návrhu počítačových obvodů se pracuje často právě s ní.

2.2 Egypt

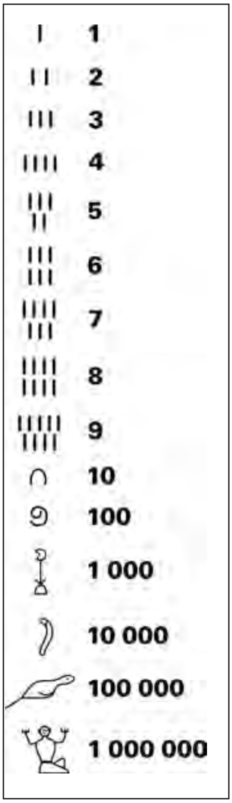
I když historie, včetně té matematické, začala v Sumeru, nezůstal starý Egypt o nic pozadu. Je to celkem přirozené, obě původní egyptská království, Horní a Dolní Egypt, byla závislá na sezónních záplavách Nilu a na všem, co s nimi souviselo, jako bylo každoroční vyměřování políček a k tomu potřebná fungující státní administrativa. Takže také vybírání a evidence daní. To se bez počítání a měření neobešlo. Geometrie byla podobně jako v Mezopotámii řazena spíš ke stavitelství, ale jednoduché zacházení s číselnými záznamy si egyptští administrátoři, vesměs kněží, museli osvojit nejspíš relativně brzy. Egyptská říše, poté co ji začátkem 3. tisíciletí př. n. l. sjednotil napůl ještě legendární *Menes* (také Menej nebo Meni), prošla vývojem dlouhým přes dva tisíce let. Za tu dobu se toho hodně změní dokonce i v tak konzervativním prostředí, jaké bylo v údolí Nilu. To, co o egyptské matematice víme, pochází však jen z několika zdrojů. Čísla, hlavně ta velká, známe už z hieroglyfických nápisů. Slavnostní byly tesány do kamene, pro běžnou potřebu sloužil papyrus a často ještě levnější materiály – střepy a kameny. Psalo se na ně rákosovým stéblem. Nejstarší nalezené záznamy se datují už do předdynastické doby kolem roku 3100 před naším letopočtem.[15] Hlavní účel

[14] Takovým algebrám „na hodinovém ciferníku“ se také říká modulární.
[15] Tedy skoro současně se sumerským piktografickým písmem a nejspíš nezávisle na něm. Na rozdíl od něj se hieroglyfy dál skoro nevyvíjely a neovlivnily jiná písma (s výjimkou hieratického).

hieroglyfů ale byl (nebo to tak faraonům alespoň připadalo), aby vytesány do kamene hlásaly slávu a velké činy vládců, pokud možno navěky. Nebo alespoň tak dlouho, než je žárlivý nástupce nechá zase odtesat.

Tesání byla poměrně pomalá práce, skoro stejně namáhavá pro složité i jednoduché hieroglyfy. Nicméně hieroglyfické číslovky, hlavně ty nižší, většinou dělají dojem, že vznikly z jednoduchých grafických prvků.[16]

Těch pro čísla je sedm a odpovídají našim mocninám deseti, od $1 = 10^0$ po milion, tedy 10^6. Čísla mezi nimi se vyjadřovala opakováním, například 70 se napsalo sedminásobným opakováním symbolu pro 10, pro 54 se pětkrát opakoval symbol pro 10 a čtyřikrát symbol pro 1. Soustava to byla sice desítková, ale ne poziční, a číslice bylo možné libovolně zpřeházet, aniž by se změnila hodnota čísla.



Egyptské číslovky

Z otesaných kamenů jsme se víc nedozvěděli. Písaři však pro praktické potřeby vyvinuli jakousi rukopisnou verzi hieroglyfů pro psaní na papyrus. Skládá se z teček a rovných i obloukových čárek. Hieratické písmo[17] mělo i své číslovky, samostatné pro každý řád a v něm už také pro každou hodnotu v desítkové soustavě, takže v něm byly například čtyři různé symboly pro 2, 5, 20 a 50. Největší číslice byla 9 000, a protože číslice byly pro každý řád jiné, nebylo třeba je psát pozičně a mohly být v jakémkoli pořadí. Nulu, ani tu poziční, Egypťané neznali.

O tom, co a jak uměli Egypťané počítat, víme spíš z papyrů. Oba, o kterých se v této souvislosti mluvívá, pocházejí až ze střední říše, z doby 12. dynastie, patrně z dob faraona Amenemheta I. a jeho spoluvládce a nástupce[18] Sesostra I. Jsou oba zhruba stejně staré – vznikly kolem roku 1850 př. n. l. Ten, kterému se někdy říká Rhindův, se nezachoval v originále, ale v opisu o dvě století mladším, tedy někdy z let okolo 1650 př. n. l. Zato ale písař jeho zachované verze uvedl i své jméno, takže se rukopisu v novější době říká častěji Ahmesův (Henry Rhind byl skotský egyptolog, který papyrus získal v Luxoru v roce 1858). Rukopis je popsán hieroglyfy a obsahuje 87 vzorových řešených příkladů. Je to svitek dlouhý asi 6 metrů a široký zhruba 35 cm a dnes je uložen v Britském muzeu v Londýně.

Druhý papyrus, také z let kolem 1850 př. n. l., našli dva hledači památek,[19] bratři Ahmed a Muhammad Abd el Rassulovi v Údolí králů poblíž Dér el-Bahrí v roce 1878. Přes několik majitelů se v roce 1893 dostal k ruskému sběrateli V. S. Goleniševovi, který ho v roce 1912 daroval moskevskému Muzeu umění. Dnes je znám jako *Moskevský papyrus*,

[16] Stojí za povšimnutí, že hieroglyfy pro menší čísla nemají příliš složitý tvar, ale hieroglyf pro milion je klečící postava s rukama zvednutýma nad hlavu v oslavném gestu. Milion asi i tenkrát budil skoro moderní pocity.

[17] Další písmo, koptské, vzniklo až v antice, na základě řečtiny.

[18] Tahle kombinace slov obvykle znamená, že druhý nechal prvního ve vhodnou chvíli zavraždit. Tentokrát tomu tak není, Sesostris zřejmě pro svého staršího partnera vedl války, a když byl Amenemhet během jeho nepřítomnosti a zřejmě i bez jeho popudu zabit, rychle se vrátil, udělal v říši pořádek a očistil Amenemhetovu památku. Odtesávání hieroglyfů se tentokrát nekonalo.

[19] No dobře, tak vykradači nalezišť. Ale naleziště nezatajili, takže jim trochu cti přiznejme. Školení archeologové v té době nebyli o moc lepší.

a protože se tehdy jeho písař nepodepsal, asi mu to jméno zůstane. Je to opět svitek, tentokrát psaný v hieratickém písmu s přepisy do hieroglyfů a obsahuje 25 řešených příkladů.

To hlavní, co se z nich dovídáme, je, že ani Egypťané nešli nad úroveň konkrétních řešených problémů a nenapadaly je obecné otázky. Samozřejmě neznali ani vzorečky v dnešním smyslu – početní postupy se naučili na konkrétních hodnotách, které uměli obměňovat podle potřeby. Úlohy v papyrech jsou hlavně konkrétní návody – Rhindův papyrus například začíná šesti úlohami jak rozdělit nějaké množství bochníků (od 1 do 6) mezi 10 strávníků. Egypťané uměli sčítat i násobit, zvládli to, čemu se dnes na základní škole říká „přechod přes desítku“, a měli symbol pro zlomky s jedničkou v čitateli. Navíc uměli zacházet i s 2/3 a 3/4, které přeci jenom často potřebovali. Řešili i problémy, které my zvládáme lineárními rovnicemi nebo kvadratickými rovnicemi bez lineárního členu, takže věděli o existenci odmocnin. Složitější úlohy neřešili přímo, řešení se spíš přibližovali postupnými kroky. Rhindův papyrus obsahuje i úlohy na výpočet objemu čtyřbokého jehlanu (pro spotřebu materiálu na pyramidu jako dělané) a geometrické úlohy, ze kterých je zřejmá znalost speciálních případů Pythagorovy věty. Také na Moskevském papyru jsou řešeny praktické problémy – plocha lichoběžníku, objem komolého jehlanu[20] nebo povrch válcovité střechy.

2.3 Počítání v zemi proroků

Z úrodného půlměsíce, kterým jsme začali tuto kapitolu, už známe obě hlavní a geometricky prakticky koncová území – Egypt a Mezopotámii.[21] Zbývá několik vět o těch ostatních. Kypr můžeme považovat kulturně spíš za sféru mezopotamského a později řeckého vlivu. Zbývá tedy Palestina a Judea. Je to trochu zvláštní věc a možná i příležitost k zamyšlení o zdánlivě nepatrných příčinách, které vedou kulturní vývoj různými směry, i když probíhá v podobném prostředí. Staří Židé žili na území mezi oběma velkými centry, dokonce prošli jak egyptským, tak babylonským zajetím, vlastní matematiku, která by byla srovnatelná s oběma sousedními, ale zřejmě neměli.

Je pravda, že v obou „okolních“ civilizacích patřilo vzdělání k „majetku“ vybraných vrstev, v Egyptě to byli kněží, babylonští písaři k nim asi neměli daleko, a mezi tyto vyvolené židovští otroci jistě nepatřili. Mojžíš, který podle Starého zákona dostal dobré vzdělání, byl nejspíš výjimka. Významnější důvod bude asi v tom, že Židé strávili značnou část své starší historie jako kočovníci, a ti nejsou k vývoji složitější matematiky moc motivováni – nestaví domy, nevyměřují pole ani kanály nebo cesty. I když se usadili, postupoval jejich intelektuální život trochu jiným směrem, a co potřebovali počítat, k tomu už měli k dispozici me-

[20] To je ten s uříznutou špičkou – v Egyptě, samozřejmě, čtyřboký.

[21] Íránskou vysočinu můžeme s přimhouřeným okem zařadit (alespoň v počítání) pod kulturní vliv Mezopotámie, i když je k ní od obou řek ještě kus cesty.

tody svých sousedů. K číselným záznamům jim stačila písmena hebrejské abecedy. Je jich 22, a tak čísla 1–9 obsadila prvních devět písmen, čísla 10–90 druhou devítku, a ještě zbyla čtyři poslední písmena na čísla 100–400. Když potřebovali napsat 700, napsali písmena pro 400 a 300, a znamenalo to součet; později přidávali další stovky tím, že začali zase od začátku – alef (א) mohlo být podle souvislostí také 500, *bet* (ב) 600, *gimel* (ג) 700 a tak dál. Buďme ale objektivní: nebyli v tom první ani poslední – stejně šli na zápis čísel už Féničané a později i klasičtí Řekové.

V Talmudu je 613 přikázání, 248 z nich je pozitivních („konej“) a 365 negativních („nekonej“). Jen 10 z nich (a teologové se dosud dohadují, podle čeho je vybrali) bylo uznáno za tak důležitá, že je legendy spojují s Mojžíšovými deskami, jakousi Boží vyhláškou o morálce. Tu převzalo i křesťanství. Z tolika přikázání se dá vyčíst hodně, ale příkaz „O asociativitu grupových operací dbáti vždy budeš!“ ani zákaz „Nulou nikdy neděl, státi-li chceš čistý před tváří svých bližních!“ mezi nimi nevyčteme ani náhodou.

Heslo II. Matematika ve službách mystiky

Už jsme si řekli, že matematika je věda o strukturách, které mohou být vyplněny různým obsahem. Pochopit struktury, to má několik přitažlivých účinků – patří mezi ně vnesení řádu do věcí, které mohou připadat chaotické, a také značná spolehlivost závěrů, ke kterým se v rámci už poznaných struktur dobíráme. Porozumění složitým strukturám nabízí lidem nečekané možnosti použití nejen při poznávání věcí smysluplných, ale i pro vnášení zdánlivého řádu do pošetilých, umělých konstrukcí. Proto se matematika stává příjemným nástrojem i pro mysticismus a esoterická učení. Vesměs nejde o nijak vyspělou matematiku, postačí základní početní operace a běžná geometrická měření, víc by tvůrci tajemných učení a hlavně jejich nekomplikovaní následovníci ani nestrávili.

Všechno to počítání a geometrizování, o kterém právě byla řeč, už vesměs zvládali jak v Sumeru a Babylonu (ten je obzvlášť oblíbený), tak v Egyptě. Tedy v zemích, ve kterých má původ první zaznamenaná matematika. Vznikla v nich také první psaná svědectví o všem možném včetně esoterických nauk, ať už se v nich počítalo nebo jen tak klábosilo, takže se nedivme, že do těchto končin kladou základy svých učení také mnohé mystiky,[22] nebo se tak alespoň snaží tvářit.

Pokusme se to celé trochu srovnat. Existují esoterická pojetí, ve kterých matematika vcelku není, v jiných naukách se matematika využívá výhradně jako nástroj pro praktické provozování jejich postupů – v *astro-*

[22] Jistě jste i vy v knihkupectví viděli nějaký ten „Egyptský snář“, „Babylonskou astrologii“, možná i „Židovskou kabalu“. V posledních letech svádějí tvrdý konkurenční boj s orientálními učeními nejrůznější provenience (Indie a Tibet vedou, Čína je v těsném závěsu, Mongolsko poněkud ztrácí). Zdá se, že na svou příležitost čekají přírodní národy a jejich šamani – spisky sepsané v útulných kavárnách, které se vydávají za jejich moudrost, teprve ladí formu.

logii se například počítá a hlavně vyměřují úhly dost komplikovaně, vědecký punc jí to ale opravdu nedodává. Nezapomínejme ani na *pyramidologii*. Ta sice nevsází na čistokrevnou magii, spíš na tajné znalosti stavitelů té jediné, která ji zajímá, Cheopsovy alias Chufeovy, s čísly však manipuluje se záviděníhodnou urputností. A pak jsou tady esoterické nauky, které se k číslům hlásí jako ke zdroji svých hlavních informací. Dnes se většinou docela zapomíná na kabalu (ta ale, i když se odvolává na mnohem starší kořeny, používá hlavní spisy *Sefer ha-bahir* a *Sefer ha-zahar* až z 12. a 13. století našeho letopočtu) a konečně je tady čím dál populárnější *numerologie*. Zatímco kabala v rámci svého dost širokého učení ještě přikládá magický význam jak číslicím, tak literám (víme, že v hebrejštině vlastně splývají), v numerologii jde jenom o číslice. O nesmyslnosti obou už bylo popsáno dost papíru a stránky téhle knihy raději využijeme na něco rozumnějšího. Nicméně když už se numerologie tak moc odvolává na čísla, několik vět jí věnujeme. Koneckonců i historie matematiky má své kuriozity.

Podstata numerologických věšteb je v tom, že jsou různým číslům přiřazeny různé mimočíselné významy (jsou šťastná nebo nešťastná, věští délku života či počet dětí, určují povahu a kdovíco ještě). Takto využitelných čísel není zrovna moc, přesto jich zručný numerolog někdy sestaví i několik. Zručně přitom manipuluje s písmeny jména, datem narození a několika málo dalšími osobními daty (o rodném čísle nebo IČO firmy v numerologických příručkách zmínka nebývá).[23] Nějaká forma numerologie je rozšířená snad všude po světě, poněkud ale trpí určitou nejednotností ve výkladu – v Asii je devět superšťastné číslo (přízeň devíti draků je záruka štěstí), našincům celkem nic neříká. Pověstná třináctka vyvolává u někoho až hysterické reakce,[24] jiný ji považuje za posvátnou (je počtem osob u Poslední večeře), sedmička je pro někoho šťastná, pro jiného přímo tragická, a takových nejednoznačností se při četbě numerologických spisů najde.

Trochu ucelenější je ta odnož numerologie, která staví na židovské gemetrii (což je slovo patrně krkolomně odvozené z řečtiny a původně mělo znamenat „geometrické číslo“) a její muslimské analogii Chisab al-džumal (sčítání celku). Ty také přiřazují písmenům čísla, mají ale celkem ustálený kód i výklad. Zvláštní hrůzu v nich vyvolává číslo 666 – „číslo šelmy“, představující také ďábla nebo Antikrista. S pozoruhodnou vytrvalostí dodnes někteří numerologové hledají takové formy jména proslavených padouchů, které by po obratném „začíslování“ k 666 vedly.[25]

---

23 S osudem tak musí docela zacvičit, když žena po svatbě změní příjmení (to ale bývá zásah do osudu v každém případě), případně když se přestěhujeme do země, kde platí jiné počítání letopočtu nebo se užívá jiná abeceda. Co s předurčením nadělal přechod z juliánského na gregoriánský kalendář v roce 1582 (na Moravě 1587), to se nikde neuvádí.

24 Historický podklad má strach z pátku třináctého. Ten den v říjnu 1307 zahájil král Filip IV. Sličný pověstnou akci proti řádu templářů. Ta skončila v roce 1310 jejich spektakulární a krutou hromadnou popravou.

25 Uchylují se někdy k vynalézavým a pro historiky nebo filology šokujícím násilnostem při zacházení se slovy a hlavně se jmény. Například se jim povedlo vydestilovat číslo 666 ze

3. Řecký skok
(Matematika v antice)

V předchozích dvou kapitolách jsme zaznamenali velké události, které zahájily cestu k matematice. Lidé si uvědomili, že existuje pojem množství, nezávislý na objektech, kterých se týká, a naučili se různá množství vymezovat a porovnávat pomocí čísel. K tomu přidejme, že s vynálezem písma brzy našli zvláštní písmena a „slova" z těchto písmen i pro čísla. Ve vyspělých civilizacích už se nespokojili jenom s konstatováním množství a počtu ani s jeho porovnáváním, ale naučili se postupně i složitější manipulace s nimi. To všechno však bylo na úrovni „řemeslné" dovednosti pro zvládání praktických problémů, asi stejně, jako bylo nutné naučit se vykovat motyku pro obdělání políček.

V myšlení, které stojí na abstrakci, ale bylo latentně přítomno něco víc – schopnost popisovat a zkoumat i struktury velmi obecné a zákony, jimiž se ony struktury řídí. Tenhle krok – od dovednosti k vědě – udělali až antičtí Řekové a poradili si s ním způsobem, který dodnes bere dech. Dokonce ještě dnešní žák končící základní školu musí mít dojem, že všechno, co se učil, objevili právě oni. Není to pravda, jak ještě uvidíme, ale zas tak daleko od pravdy to také není. Navíc antická řecká matematika je první, ve které známe jména jejích tvůrců, a ne jenom králů, pro které pracovali. Teprve teď můžeme začít plnit slib daný v úvodu, že tato kniha bude stejnou měrou o matematice i o osudech těch, kdo ji tvořili. Zatím jsme poznali jménem jenom písaře Ahmese a z dějin umění známe jména několika egyptských stavitelů, pokud se společensky vyšvihli tak vysoko, aby stáli faraonovi za pochvalu – ti také museli umět počítat, matematici to ale nebyli ani v tehdejším smyslu.[26]

Proto věnujeme tuto kapitolu skoro výlučně Řekům. Než se do toho pustíme, měli bychom se dohodnout na časovém zařazení. V různých zdrojích se periodizace řeckých dějin trochu liší, zhruba ale vypadá následovně. To, čemu se říká „antické Řecko", trvalo asi dva tisíce let – zhruba od 18. nebo 17. století před naším letopočtem, kdy se předpokládá příchod Achájů,[27] po přechod ideologické i politické moci do rukou křesťanství.

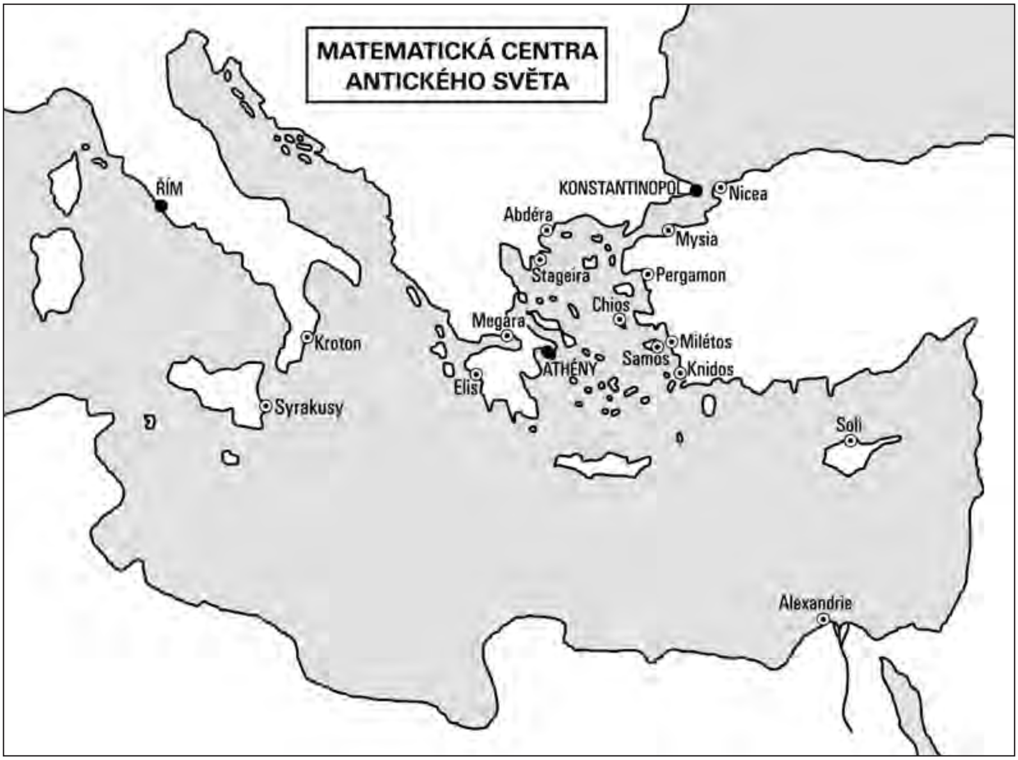
Po Achájích přišli v 15. století před naším letopočtem Jónové a po nich zhruba ve 12. století poněkud barbarští Dórové. Historici obvykle rozlišují období *mykénské* (zhruba do roku 1100 př. n. l.), *homérskou* dobu (1100 až 800 př. n. l.),[28] kterou všeobecně považují za dobu úpadku po

jména „Nero Caesar" napsaného v hebrejštině nebo ze „jména" DIOCLES AVGUSTUS v latinském zápisu a s římskými číslicemi, a dokonce i z hebrejsky psaného Caesara, když vynechali jedno písmeno. To všechno proto, aby některé osoby spojili s „ďáblem". Nadšený numerolog se nezastaví před ničím.

[26] Všestranně talentovaný Imhotep (kolem roku 2700 př. n. l.), oblíbenec faraona Džosera, je z nich asi nejslavnější.

[27] O tom, odkud přišli Achájové, se historikové dosud dohadují, vypadá to ale, že se prosadí sever a severovýchod od Balkánu, tedy Podunají.

[28] Slavná trojská válka měla být někdy ve 12. století př. n. l. Homér žil skoro jistě o několik set let později.



Slavná místa řecké matematiky

dórském vpádu, *archaickou* dobu (800–500 př. n. l.), kdy začíná rozkvět antické kultury (první olympiáda byla roku 776 př. n. l.), *klasickou* dobu, která vyvrcholila řecko-perskými válkami (494–449 př. n. l.) a doznívala až do vlády Alexandra Makedonského (356–323 př. n. l.), a do doby *helénistické*. Ta začíná Alexandrem a jeho nástupci, přičemž za připomenutí stojí hlavně Ptolemaiovci v Egyptě. Na jejím konci postupně přešlo Řecko a jeho osady pod nadvládu Římanů. Pád Řecka dovršila bitva u Korintu v roce 146 př. n. l. O řecké matematice se dá něco podstatného najít až od *archaické doby*, pak to ale začíná stát zato. Tady je možná místo na několik poznámek ani ne tak o matematice jako spíš o tom, kde vlastně došlo k onomu antickému pokroku v jejím chápání. Ze školních hodin dějepisu si většinou odnášíme představu o kulturní výlučnosti Athén, neurčitý pocit, že hlavně v nich vznikaly myšlenky, které dodnes stojí za řeč. Jistě, po filozofickém boomu a poté, co Platon založil Akademii, nejspíš první univerzitu v dějinách, byly Athény významným centrem vzdělanosti a jistě domovem humanitní větve filozofie. Jenomže Sokrates žil v letech 469–399 př. n. l. (rok narození je nejistý), Platon v letech 427–347 a „svou“ Akademii založil v roce 387, stále před naším letopočtem, samozřejmě. V té době už ale byla řecká matematika velmi daleko a vysoko. V této kapitole potkáme hodně řeckých jmen a u mnohých z nich jsou přívlastky, naznačující původ nebo spíš hlavní působiště – z Milétu, ze Samu, z Chiu, z Abdéry, z Knidu, ze

Stageiry, abychom jmenovali ty z předhelénistické doby. Vyplatí se nahlédnout do mapy historického Řecka – Milétos a Knidos leží v Malé Asii, Samos a Chios jsou ostrovy kousek od jejího pobřeží, Abdéra je na pobřeží Thráckého moře a Stageira v Chalkidě, obě tedy na cestě z Malé Asie do pevninského Řecka. Jen Elis leží na Peloponésu. Pravda, Pythagoras se zdánlivě vymyká – proslavil se v Krotonu, a ten je v Itálii, ale začínal na Samu. Vliv mezopotamské kultury, zprostředkovaný Chetity, se přímo vnucuje.[29] Ostatně kdo se začetl do Iliady, toho možná zarazilo, kolik „králů" z pevninského Řecka se muselo dát dohromady proti jednomu městu a jak moc práce jim dalo ho dobýt. Jaké asi byly pocity pasáků koz z hor, když viděli výstavnost dobývané Troje. Úzký pruh pobřeží Malé Asie nebyl rozhodně periferií kulturního Řecka – a toho matematického už vůbec ne. Spíš naopak.

Pokud jde o matematiku, nebylo pobřeží Malé Asie zapadlým venkovem ani v klasické době, kdy se rozhodně nemuselo krčit před Athénami, ani v době helénistické, kdy příliš neztrácelo za suverénní Alexandrií. Oblast Mysia, na severozápadě Malé Asie, či města jako Pergamon nebo Nikaia mohou posloužit za příklady.

3.1 Každodenní počítání

I když antičtí Řekové udělali z účelového, v podstatě řemeslného počítání vědu, neznamená to, že by nepočítali docela rutinní praktické úlohy. I v tom prokázali nejen vynalézavost, ale i nebývalou schopnost komplikovat si život.

O matematice v kultuře krétsko-mykénské a v době před a těsně po vpádu Dórů se nedá najít mnoho údajů. Jistě tehdy lidé počítání zvládali – hradby Troje ani kyklopské zdivo v Mykénách nepostavili matematicky negramotní barbaři a také tabulky s účetnickými záznamy z té doby ukazují, že základní počítání už bylo rutinní záležitostí. Zdá se však, že v té době nedošlo k objevům, které by si zasloužily zvláštní zmínku v historii. Běžné početní techniky bylo možné převzít z Mezopotámie a od Nilu, a když se k tomu přidala zkušenost, rozumný odhad a trocha štěstí, tak domy nespadly, hradby vydržely obléhání a voda tekla určeným směrem.

Zvláštní zmínku si zaslouží číselná soustava, kterou Řekové zavedli a postupně obměňovali. V archaické době, zhruba od 7. století př. n. l., užívali svoji vlastní, *akrofonickou soustavu* číslic, ve které byla vybraná čísla označena písmenem, jímž začínalo jejich čtení. Později byla nahra-

---

[29] A je také prokázáno, že obě prostředí o sobě přinejmenším dobře věděla. V chetitském centru v dnešní Bogazköy se našly tabulky se smlouvou mezi místním vládcem Mutavatillišem (1306–1289 př. n. l.) a králem země, jejíž jméno čtou chetitologové jako zkomolené Illios. Mimochodem, jméno toho krále se nedá číst jinak než jako Alexandr (bylo to také jméno, spíš přezdívka, prince Parida – ne, že by smlouvu uzavřel on, ale to jméno se zřejmě užívalo častěji). Kulturní vlivy trvají déle než říše, a chetitská padla až roku 1069 př. n. l. To ale padla jen říše, dovednost jejích obyvatel existovala dál a vnímaví Řekové z prosperujících maloasijských osad o ní věděli.

zena *alfabetickou soustavou*, její zbytky se ale při zvláštních příležitostech používaly až do 2. století př. n. l. a částečně (spolu s etruskými čísly) ovlivnila podobu římských čísel. Pokud vynecháme symbol pro **1**, který byl I (a jeho vznik si umíme dobře představit – prostě při počítání zboží udělali za každý kus čárku, a my to vlastně děláme dosud), byla další čísla Γ pro **5** (Pente, Πεντε), Δ pro **10** (Deka, Δεκα), Η pro **100** (Hekaton, Ηεκατόυ), Χ pro **1 000** (Chilioi, Χιλιοι) a Μ pro **10 000** (Myrioi, Μυριοι).

Ti, kdo mají rádi řečtinu, si zaslouží několik vysvětlujících poznámek. Znak pro **5** byl původně skutečně Π, ale v achajské alfabetě se druhá nožička psala kratší a pozdější opisy (z rukou písařů zvyklých na ionskou alfabetu) z toho nakonec udělaly zdánlivě nelogické gama s patkou (skutečné gama se ale vždy psalo bez patky Γ). Podobně Η se v achajské alfabetě četlo jako naše „h“ a ve slově Ηεκατόν označovalo přídech (který se dnes značí jinak, uvolněný symbol začal být později v ionské řečtině používán většinou pro „éta“). Řekové se opravdu neradi chovali nelogicky a na jejich číslech to je znát.[30]

Čísla „mezi“ se pak doplňovala opakováním číslic, takže **4** bylo IIII, **8** se psalo ΓIII. Později Řekové doplnili znaky pro **50, 500, 5 000** a **50 000** – vždy to bylo staré známé Γ, ozdobené na vodorovné čárce jakýmsi praporkem, pokaždé trochu jiným. Také znak pro **1** se v peněžních záznamech mírně modifikoval, podle toho, o kterou „měnu“ se jednalo, zda to byl obolos, drachma nebo talent.

Prostému zaznamenávání počtu to vyhovovalo, značek navíc nebylo moc, takže se dobře pamatovaly a zápis byl, i když se to nezdá, dost přehledný. Na počítání *akronymická soustava* už tak šikovná není, hlavně proto, že systém není poziční a desítkový by snad mohl být jen s přimhouřením oka nad oněmi gamami s praporky. To samozřejmě nemohlo zcela uspokojovat, a tak v klasické době vyvinuli alfabetickou soustavu, lépe řečeno převzali ji od Féničanů. Je zajímavé, že už ve starém Řecku měla přízvisko „učenecká“ – zřejmě ji nevymýšleli praktici. Že by ale uspokojovala při složitějším počítání, to se také říci nedá. Postupně, tak jak šla písmena v alfabetě za sebou, dostávala i číselné významy, takže pro **1, 2, 3, 4, 5** byly symboly α, β, γ, δ, ε, nebo také A, B, Γ, Δ, E, a tak dál až do **9**, což byla ϑnebo také Θ. Až na to, že ono „a tak dál“ nebylo „tak dál“ v dnešním smyslu. Stará řečtina totiž měla tři písmena, která se dnes už neužívají, takže je obvykle nenajdete v současných slovnících nebo matematických tabulkách – první z nich byla *digamma* (označovala číslo 6, a když uvážíme, že její jméno vlastně znamená „dvojgamma“, a podíváme se, které číslo reprezentovala gamma, budeme mít pocit, že mohlo být i hůř). Další dvě později zmizelá písmena byla *koppa* a *san*.

Písmena po ϑfungovala pro násobky deseti, takže **10, 20, 30 … 80** se značily ι, κ, λ, **…** π nebo také I, K, Λ **…** Π. Schválně jsme vynechali **90**, pro které bylo už zmíněné písmeno *koppa*. Už se dá vytušit, že další

[30] Řekové tvořili řadu městských států a ani řečtina nebyla ve všech jednotná. Uvedený tvar „éta“ se ujal ve většině, ale ne ve všech.

písmena byla pro násobky sta, takže **100, 200, 300 … 800** se psalo ρ, ο, τ, υ, φ, χ, ψ, ϖ, případně Ρ, Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω a pro **900** zbývá poslední neexistující písmeno *san*. Čísla „mezi“ se psala celkem logickou sčítací metodou, takže například **14** bylo ιδ a **333** bylo ΤΛΓ. Taková soustava samozřejmě nebyla poziční a nepotřebovala ani poziční nulu – při „sčítacím“ zápisu by ji neuplatnila. Řekové neznali ani „množstevní“ nulu – k tomu, že *nic* je také *několik*, nedospěli ani oni.

Soustava to je nakonec docela úhledná, pokud však nepotřebujeme napsat hodně velké číslo, a to Řekové občas potřebovali. Uvědomili si, že kolem písmenek (v této souvislosti vlastně číslic) je místa habaděj, a začali psát do levých rohů. Připisovali do nich malé písmeno *jota*, ι napřed nahoru, takže **2 000** bylo **͵Β, 5 000** bylo **͵Ε** a tak dál, včetně našeho známého *digamma*. Existoval ale i druhý způsob, při kterém se jota psala vlevo dolů – pak se ony **2 000** a **5 000** psaly **ͅΒ** a **ͅΕ**. Čísla, která potřebovala desetitisíce, využívala **M**, ale platné cifry se tentokrát psaly nahoru, takže **20 000** a **2 220 000** se psaly

$$\overset{\beta}{\mathbf{M}} \text{ a } \overset{\sigma\kappa\beta}{\mathbf{M}}.$$

Popsaný systém byl sice nejobvyklejší, avšak ne jediný – v různých městech měli své zvláštnosti, také někteří slavní matematici navrhovali jeho úpravy a hlavně psaní písmen nad sebe dost dráždilo, takže vznikala různá zjednodušení.[31] Celou soustavu to ale ještě dál komplikovalo.

Nešikovný zápis čísel pronikavě znesnadňoval praktické počítání, jakmile došlo na trochu náročnější výpočty (vzpomeňme, co všechno Sumeřané dokázali se svou poziční desítko-šedesátkovou soustavou spočítat), takže řečtí matematici museli hledat kvalitativně novou cestu. Byli vynalézaví, to je ostatně vidět i na jejich číslech, a tak se tentokrát docela trefili – začali početní úlohy řešit geometricky. Mělo to několik následků – především ten, že konečně začala geometrie jednoznačně patřit do matematiky, a ne třeba do stavebnictví nebo polního hospodářství. Spolu s tím se začala nebývale rozvíjet. My lidé máme rádi názornost, vizuální představu o tom, co děláme (ostatně zrak nám zprostředkuje okolo 80 % informací), a geometrické počítání této naší potřebě vychází vstříc. Navíc byly konstrukce na řešení i poměrně složitého počítání většinou dost jednoduché a rychlé, a to byla další výhoda. Vždyť i dnešní žáci se ještě, jen tak okrajově, učí sčítat úsečky nebo řešit dvojici lineárních rovnic graficky, a pokud jsou alespoň trochu vnímaví, ocení, jak málo práce to dá. O něco později se dozvídají i to, že mohou při znalosti Pythagorovy věty graficky zvládat také druhé odmocniny.

Geometrické počítání však mělo i své nevýhody. Tak například geometrické konstrukce poskytovaly jen omezenou přesnost, závislou na přesnosti rýsování, i když to by se pro praktické účely vcelku ještě sne-

[31] Naštěstí řečtí matematici, jako ostatně jejich předchůdci a na dlouhou dobu i jejich následovníci, nepřišli na nápad psát vzorečky, tedy nahradit čísla písmenky, tentokrát bez konkrétního číselného obsahu. Psát místo jednoho písmene jiné, a to pokaždé jiné nebo naopak stejné pro různá množství, na tom by se museli při své vynalézavosti neuvěřitelně vydovádět.

I	II	III	IIII	Γ
1	2	3	4	5
ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
6	7	8	9	10

Γ	Δ	H	X	M
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Murioi
5	10	100	1000	10 000

Γ^{Δ}	Γ^{H}	Γ^{X}	$\overline{\Gamma}^{M}$
50	500	5000	50 000

Příklady řeckých číslovek – achajské (akrofonické)

α	β	γ	δ	ε
Α	Β	Γ	Δ	Ε
1	2	3	4	5
ι	κ	λ	μ	ν
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν
10	20	30	40	50
ρ	σ	τ	υ	φ
Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ
100	200	300	400	500

$^{\iota}\mathrm{A}$	$^{\iota}\mathrm{B}$	$^{\iota}\Gamma$	$^{\iota}\Delta$	$^{\iota}\mathrm{E}$
$_{\iota}\mathrm{A}$	$_{\iota}\mathrm{B}$	$_{\iota}\Gamma$	$_{\iota}\Delta$	$_{\iota}\mathrm{E}$
1000	2000	3000	4000	5000

ionské (alfabetické)

slo. Z dlouhodobějšího pohledu se nakonec, po dost dlouhé době, projevilo jako hlavní nevýhoda něco jiného – geometrické počítání podporovalo geometrický výklad výpočtů. Nejen že číslo bylo úsečka, ale součin dvou čísel byl obdélník,[32] tedy plocha, součin tří čísel byl kvádr, takže objem, a dál už násobení nějak ztrácelo oporu v realitě. Geometrický výpočet také zrovna nemotivuje potřebu záporných čísel – zápornou úsečku nikdo z Řeků neviděl[33] a zápornou plochu už teprve ne. Jinou nevýhodou geometrického vnímání při výpočtech bylo setkávání různých mocnin v jednom vztahu. Vztah, který dnes vyjadřujeme rovností

$$x^2 - 4 = x + 2,$$

vnímali jako jakési trapné nedorozumění – vždyť jak může někdo po-

[32] To, že se žáci dodnes učí odříkat Pythagorovu větu jako tvrzení o „čtvercích nad přeponou a odvěsnami“ není poetický obraz – Řekové tehdy druhou mocninu jinak pojmenovat neuměli, dokonce ji také tak vnímali. Možná to nakonec bylo lepší, než když dnes snaživý žáček u tabule oddeklamuje „á na druhou plus bé na druhou se rovná cé na druhou“, aniž by měl tušení, co ta říkanka vlastně znamená.

[33] Musela přijít renesance, a hlavně René Descartes, aby se číslům vrátila, před polovinou 17. století našeho letopočtu, jejich důležitost.

rovnávat úsečku a čtverec.[34] Protože uměli výrazy upravovat, dokázali si s tím poradit – z takové rovnosti udělali vztah

$$x \cdot (x-1) = 6,$$

a to už byl obdélník s nějakým poměrem stran a celkovou velikostí.[35]

Tady bychom měli vyjasnit dva omyly, které by mohly vzniknout. Především to, že Řekové s čísly neradi počítali, ještě neznamená, že je ignorovali, nebo že to počítání vůbec neuměli. Uměli, jen jim dalo hodně práce. Také si uměli s vlastnostmi čísel, hlavně těch celých, docela pohrát. Druhá nejasnost bývá občas v tom, na co vlastně rýsovali – už víme, že Sumerům to na uplácanou hlínu moc nešlo. Řekové používali po vzoru Egypťanů papyrus, ale ten byl drahý, takže sloužil k významnějším zápisům, které měly nějakou dobu vydržet. Nezávazné náčrtky kreslili do písku, buď na plochu na dvoře svého domu, nebo častěji v míse zaplněné vlhkým jemným pískem – to dalo méně chození a snadněji se náčrtky zase smazaly. Až narazíme na Archimeda a jeho „nedotýkej se mých kruhů“, bude nám situace srozumitelnější. Jen na okraj – do mísy s pískem se dost špatně píší písmena, ale dají se do ní naskicovat úsečky a oblouky – bod navíc pro geometrické počítání.

Ať už u nás převáží zmíněné výhody nebo nevýhody, jednu zásadní zásluhu řeckému geometrickému počítání upřít nemůžeme. Skutečnost, že přesnost rýsování nebyla absolutní a nejspíš ani nijak oslnivě velká, nutila matematiky, aby logicky dokázali, že při ideálním rýsování by výsledek nutně přesný a hlavně správný být musel. To nakonec nejspíš udělalo z matematiky onu logickou, přesnou a spolehlivou vědu, kterou je dnes. Z řemesla, jakkoli jemného a chytrého, se tak stala vlastně filozofie, a navíc metoda, po které sahá každý, kdo chce svým výsledkům důvěřovat. Ale o tom až v dalších částech.

3.2 Jak filozofie dostala jméno

Kdo se pokusí pátrat v příručkách po začátcích filozofie, narazí samozřejmě napřed na magii a náboženské kulty. Velká Matka nebo hrozivý Hromovládce někde v nedostupných výšinách byli první, kdo se nabízel jako vysvětlení, proč prší nebo jak to, že mají lidé dvě nohy. Řekové na přelomu archaické a klasické doby byli podle našich znalostí první, komu to přestalo stačit, a navíc si ještě pár otázek přidali, například co

---

[34] Konstanty už jim nevadily – o ty se nějaká zkoumaná veličina mohla zvětšovat nebo zmenšovat, ale samy o sobě byly bez rozměru, takže nerušily.

[35] Zkusíme si obě rovnice převyprávět tak, jak to uměli Řekové. Víme už, že nepoužívali písmena místo obecných veličin a kromě toho také neznali symboly pro početní operace ani rovnítko. Takže tu první rovnici by vzdělaný Řek popsal takto: „Zmenším-li čtverec o neznámé straně o čtyři jednotky, je to totéž, jako bych onu neznámou stranu zvětšil o dvě jednotky“ (nepatřičnost při srovnávání čtverce a jeho strany přímo bije do očí). Druhý vztah by pak popsal: „Obdélník, jehož jedna strana je o jednotku kratší než druhá strana, má plochu 6 jednotek, jak dlouhé jsou jeho strany?“ Když si uvědomíme, že v tomto podání zvládli i úpravu rovnic a že tak dokonce uměli řešit i kvadratické rovnice, nezbývá nic jiného, než před Řeky smeknout.